理学系向け関数解析入門 – 複素解析への応用 –

古島幹雄・大嶋康裕

令和５年２月

目 次

1 ベクトル空間と位相空間の基本概念 **2**
1.1 ベクトル空間 (Vector Spaces) 2
1.2 位相空間 (Topological Spaces) 4

2 位相ベクトル空間 (Topological Vector Spaces) **9**
2.1 位相ベクトル空間の諸概念 9
2.2 位相ベクトル空間の分離性　について 11

3 位相ベクトル空間の有限次元性について **16**

4 開写像定理 **23**

5 バナッハ空間 **30**
5.1 双対空間のノルム 30

6 Hahn-Banach の定理 **34**

7 共役線形写像について **44**
7.1 44
7.2 Banach 空間の商空間 47
7.2.1 位相空間のコンパクト性（復習） 49
7.2.2 Banach 空間に於けるコンパクト性の復習 51

8 有限次元性定理 **53**
8.1 基本定理 53
8.1.1 53
8.1.2 53
8.1.3 54

8.1.4 54
8.1.5 55
8.1.6 55
8.1.7 55
8.1.8 56
8.1.9 56
8.1.10 57
8.2 有限次元性に関する定理 59
8.2.1 59
8.2.2 60

9 補足１（複素解析から） 64
9.1 正則関数列とその極限 64
9.2 正規族 66
9.3 アスコリ・アルツェラの定理 67
9.4 スティルティスの定理の証明 69
9.5 有界正則関数全体の Banach 空間 74
9.6 Morera の定理（コーシー積分定理の逆） 75

10 コンパクトリーマン面上の解析的コホモロジー群の有限次元性 78
10.1 解析的コホモロジー群 $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ 78
10.2 開被覆の細分から誘導されるコホモロジー群の準同型写像 78
10.3 $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ の有限次元性 85

1 ベクトル空間と位相空間の基本概念

1.1 ベクトル空間 (Vector Spaces)

$k = \mathbb{R}$（実数体）または $\mathbb{C}$（複素数体）とする．

定義 1. 集合 V が体 k 上のベクトル空間であるとは，V 上に加法演算”$+$”およびスカラー積”$\cdot$”が定義され，V はこの演算に関して閉じている，即ち，$x, y \in V$ および $\alpha \in k$ に対し

$$\begin{cases} x + y \in V \\ \alpha \cdot x \in V \end{cases}$$

更に，$x, y, z \in V$，$\alpha, \beta, \gamma \in k$ に対し

$$\begin{cases} x + y = y + x, \quad x + (y + z) = (x + y) + z \\ \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x \\ {}^{\exists}\mathbf{0} \in V \text{ s.t. } x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x \\ {}^{\exists 1}(-x) \in V \ (\forall x \in V) \text{ s,t, } x + (-x) = (-x) + x = \mathbf{0} \\ 1 \cdot x = x, \ 0 \cdot x = \mathbf{0} \\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha x, \ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \end{cases}$$

が成り立つときをいう．k 上のベクトル空間を V/k で表す.

例 1. (1) $V = \mathbb{R}^n = \{{}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leqq i \leqq n)\}$

(2) $V = \mathbb{C}^n = \{{}^t(z_1, z_2, \ldots, z_n) \ : \ z_i \in \mathbb{C} \ (1 \leqq i \leqq n)\}$

(3) $V = \mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間でもあり $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である．$\{1, i\}$ が $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と見たときの基底であり，$\{1\}$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と見たときの基底.

$V = V/k$ をベクトル空間とする.

定義 2. $A, B \subset V$, $\quad x \in V$, $\lambda \in k$ に対し

$$\begin{cases} x + A = \{x + a \ : \ a \in A\} \\ x - A = \{x - a \ : \ a \in A\} \\ A + B = \{a + b \ : \ a \in A, \ b \in B\} \\ \lambda \cdot A = \{\lambda a \ : \ a \in A\} \\ -A = \{(-a) \ : \ a \in A\} \end{cases}$$

注意 1. $2A \neq A + A$

定義 3. $A \subset V = V/k$ が部分空間（*subspace*）とは次の

(1) $\mathbf{0} \in A$

(2) $\alpha \cdot A + \beta \cdot A \subset A \ (\forall \alpha, \forall \beta \in k)$

を満たすとき.

定義 4. V の k 上の次元が n（$\dim_k V = n$）とは，n 個の基底 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を持つ時，即ち，任意の $x \in V$ に対し，$^{\exists 1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in k^n$ が存在し

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

と一意的に表されるとき.

例 2. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2, \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$

問題 1. $\dim_{\mathbb{R}} V = n \Longleftrightarrow V \cong \mathbb{R}^n$（線形同型）

1.2 位相空間 (Topological Spaces)

定義 5. 集合 X が位相空間とは，X 上の部分集合からなる集合族 $\mathcal{S}$（ X の位相（*topology*）という）で次を満たすものが存在するとき：

(1) $\emptyset,\ X \in \mathcal{S}$

(2) $A, B \in \mathcal{S} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$

(3) $A_\lambda \subset \mathcal{S} \Longrightarrow \bigcup A_\lambda \in \mathcal{S}$.

集合 X と位相 $\mathcal{S}$ の組 $(X, \mathcal{S})$ を位相空間（*topological space*）という，$\mathcal{S}$ の元を開集合 *(open set)* と呼ぶ．$\mathcal{S}_0 = \{\emptyset, X\}$ を密着位相（*indiscrete topology*）とよび，$\mathcal{S}_\infty = \{X$ の全ての部分集合$\}$ を X の離散位相（*discrete topology*）という.

以下，$(X, \mathcal{S})$ を位相空間とする.

定義 6. $A \subset X$ が閉集合 *(closed set)* とは，$X \setminus A \in \mathcal{S}$，即ち，$X \setminus A$ が開集合.

定義 7. $A \subset X$ に対し

(1) $\overline{A}$：A を含む最小の閉集合：A の閉包（*closure*）という.

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F:\text{closed}}} F$$

特に，$\overline{A}$ は閉集合である.

(2) $\overset{\circ}{A}$：E に含まれる最大の開集合：A の開核（*open kernel*）という．

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{G \subset A \\ \forall G:\text{open}}} G$$

特に，$\overset{\circ}{A}$ は開集合である．

定義 8. $x \in X$ に対し，x を含む開集合を x の近傍（*neighborhood*）という．

$$\mathcal{N}_x = \{U \in \mathcal{S} \ : \ x \in U\}$$

を x の近傍系（*system of neighborhoods*）という．

特に $\mathcal{N}_x^*$ が x の基本近傍系（*fundamental system of neighborhoods*）とは

- $\mathcal{N}_x^* \subset \mathcal{N}_x$ かつ
- 任意の $U(x) \in \mathcal{N}_x$ に対し，$U^*(x) \in \mathcal{N}_x^*$ が存在して $U^*(x) \subset U(x)$

を満たすとき．

注意 2. 部分集合 $G \subset X$ は，任意の $x \in G$ に対し，x の近傍 $U(x) \in \mathcal{N}_x$ があって，$U(x) \subset G$ をみたすとき，

$$G = \bigcup_{x \in G} U(x)$$

は開集合である． これを開集合の定義にしても良い．即ち，

$$\boxed{G \subset X \text{ が開集合} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in G \ \rightarrow \ {}^{\exists}U(x) \in \mathcal{N}_x \ \text{ s.t. } \ U(x) \subset G.}$$

定義 9. $\mathcal{S}$ を X 上の位相とする．$\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ が開集合の基（*base for open sets*）とは，任意の $\Omega \in \mathcal{S}$ に対し，部分集合族 ${}^{\exists}\{B_\lambda\} \subset \mathcal{B}$ が存在し，

$$\Omega = \bigcup_{\lambda} B_\lambda$$

と表わされるとき．

定義 10. X が *Hausdorff* 空間であるとは，X の任意の *2* 点 $x \neq y$ に対し，近傍 $U \in \mathcal{N}_x$ および $V \in \mathcal{N}_y$ が存在し

$$U \cap V = \emptyset$$

が成り立つとき．

問題 2. 位相空間 X が *Hausdorff* 空間ならば，任意の点 $x \in X$ に対し，集合 $\{x\}$ は閉集合である．

［解］任意に $y \in X \backslash \{x\}$ をとる．$x \neq y$．X は *Hausdorff* より，$U(x) \in \mathcal{N}_x$, $U(y) \in \mathcal{N}_y$ が存在して $U(x) \cap U(y) = \emptyset$ とできる．

$$\therefore \quad U(y) \subset X \setminus U(x) \subset X \setminus \{x\}$$

よって，$X \setminus \{x\}$ は開集合であり，結果として，$\{x\}$ は閉集合である．逆は成り立たない． $\square$

定義 11. $A \subset X$ とする．$a \in X$ が A の<u>集積点</u>（*accumulation point*）とは，任意の近傍 $U(a) \in \mathcal{N}_a$ に対し，

$$U(a) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

を満たすとき．

$$A^d := \{a \in X \ : \ a \text{ は } A \text{ の集積点}\}$$

を A の<u>導集合</u>という．また，a が A の<u>孤立点</u>とは，$a \notin A^d$ のとき，即ち，ある近傍 ${}^\exists U_0(a) \in \mathcal{N}_a$ が存在して，

$$U_0(a) \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} U_0(a) \cap A = \{a\}$$

$F \subset X$ を閉集合とする．

$$a \in F \Longleftrightarrow {}^\forall U(a) \in \mathcal{N}_a \text{ に対し } U(a) \cap F \neq \emptyset$$

$\because$ $(\Longleftarrow)$ を示す：$a \notin F$ とすると，$a \in X \setminus F$．$X \setminus F$ は開集合より，

$${}^\exists U(a) \in \mathcal{N}_a \text{ s.t. } U(a) \subset X \setminus F \Longleftrightarrow U(a) \cap F = \emptyset$$

これは，矛盾である．$(\Longrightarrow)$ は自明． $\square$

(i) $a \in A^d \Longleftrightarrow a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.

$a \in A^d$ とする．任意の ${}^\forall U(a) \in \mathcal{N}_a$ に対し，$U(a) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. よって，$U(a) \cap \overline{A \setminus \{a\}} \neq \emptyset$. 今，$\overline{A \setminus \{a\}}$ は閉集合ゆえ，(i) より，$a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.

逆に，$a \in \overline{A \setminus \{a\}}$ とすると，<u>${}^\forall U(a) \in \mathcal{N}_a$ に対し，$U(a) \cap \overline{A \setminus \{a\}} \neq \emptyset$.</u> そこで，ある近傍 ${}^\exists U_0(a) \in \mathcal{N}_a$ に対し，$U_0(a) \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$ と仮定すると，

$A \setminus \{a\} \subset X \setminus U_0(a)$ で $X \setminus U_0(a)$ は閉集合より，

$$\overline{A \setminus \{a\}} \subset \overline{X \setminus U_0(a)} = X \setminus U_0(a)$$

を得る．よって，$U_0(a) \cap \overline{A \setminus \{a\}} = \emptyset$. これは，矛盾である． $\square$

(ii) $A \cup A^d = \overline{A}$.

$a \in A \cup A^d$ をとる．$a \in A \Longrightarrow a \in \overline{A}$ である. 一方，$a \notin A$ ならば，$a \in A^d$. よって，任意の $^\forall U(a) \in \mathcal{N}_a$ に対して，$a \notin A$ より，

$$U(a) \cap (A \setminus \{a\}) = U(a) \cap A \neq \emptyset.$$

特に，

$$\emptyset \neq U(a) \cap A \subset U(a) \cap \overline{A}$$

$\overline{A}$ は閉集合より，(i) から，$a \in \overline{A}$. こうして，$A \cup A^d \subset \overline{A}$.

逆に，$a \in \overline{A}$ ならば，$\underline{任意の\,^\forall U \in \mathcal{N}_a}$に対して，(i) より，$\underline{U(a) \cap \overline{A} \neq \emptyset}$. 今，$a \notin A$ とし，$a \in A^d$ を示せば，$A \cup A^d \subset \overline{A}$ が分かる．実際，$a \notin A^s$ とすれば，近傍 $^\exists U(a) \in \mathcal{N}_a$ があって，$U(a) \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$. 今，$a \notin A$ より，$U(a) \cap A = \emptyset$. よって，$A \subset X \setminus U(a)$（閉集合）より，

$$\overline{A} \subset \overline{X \setminus U(a)} = X \setminus U(a) \Longrightarrow U(a) \cap \overline{A} = \emptyset.$$

これは矛盾である．よって, $a \in A^d$ $\quad\therefore\;\overline{A} \subset A \cup A^d$. よって, $A \cup A^d = \overline{A}$ $\quad\square$

定義 12. $K \subset X$ がコンパクトであるとは，K の任意の開被覆 $\mathfrak{U} = \{\Omega_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ とする，即ち，$K = \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$ とする．そのとき，$\mathfrak{U}$ からの有限個の開集合

$$^\exists\{\Omega_{\lambda_1}, \Omega_{\lambda_2}, \ldots, \Omega_{\lambda_t}\} \subset \mathfrak{U} \quad s.t. \quad K = \bigcup_{i=1}^{t} \Omega_{\lambda_i}$$

定義 13. $(X, \mathcal{S})$ を位相空間 $Y \subset X$ を部分集合とする．$\mathcal{T} : \mathcal{S}|_Y = \{Y \cap U \;:\; U \in \mathcal{S}\}$ とおく．このとき，$\mathcal{T}$ は Y 上１つの位相を定める．$\mathcal{T}$ を X から誘導される Y 上の位相，または，相対位相という．

定義 14. $(X, \mathcal{S})$ および $(T, \mathcal{T})$ を位相空間とする．写像 $\varphi : X \longrightarrow Y$ が連続（*continuous*）とは，$f^{-1}\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ を満たすとき，即ち，任意の開集合 $G \subset Y$ に対し，$f^{-1}(G)$ もまた X の開集合であるとき．

注意 3. $f : X \longrightarrow Y$ が各点 $x \in X$ で連続とは $\Longleftrightarrow$ $f(x) \in Y$ の任意の近傍 $V = V(f(x)) \in \mathcal{N}_{f(x)}$ に対して，x の近傍 $U = U(x)$ が存在して，$f(U) \subset V$ が成り立つときをいう．

勿論，連続ならば各点で連続である．逆に，任意の開集合 $G \subset Y$ に対して，$x \in f^{-1}(G)$ をとると，$f(x) \in G$ を得る.G は開集合ゆえ，$f(x)$ の近傍 $V = V(f(x)) \subset Y$ が存在し，$V = V(f(x)) \subset G$ を満たす．$f : X \longrightarrow Y$ は $x \in X$ で連続より，$x \in X$ の近傍 $U = U(x)$ が存在して，$f(U) \subset V$，即ち，$U(x) \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(G)$ を得る．

$$\therefore \quad f^{-1}(G) = \bigcup_{x \in f^{-1}(G)} U(x)$$

よって，$f^{-1}(G)$ が開集合である．

例題 1 (ϵ-δ 法)**.** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が $x = a$ で連続ならば，$f(a)$ の任意の ϵ-近傍 $(-\epsilon + f(a), f(a) + \epsilon)$ に対し，$x = a$ の δ-近傍 $(-\delta + a, a + \delta)$ が存在し，

$$f\left((-\delta + a, a + \delta)\right) \subset (((-\epsilon + f(a), f(a) + \epsilon))$$

換言すれば,

任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在し，$x \in (-\delta + a, a + \delta)$ ならば，$f(x) \in (-\epsilon + f(a), f(a) + \epsilon)$ が成り立つ．これは,

$$\forall \epsilon > 0\ ,\ {}^{\exists}\delta > 0 \ \text{ s.t. } \ |x - a| < \delta \quad \rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

を意味し，世に，(ϵ, δ)-法と呼ばれている．

注意 4. $(X, \mathcal{S})$ を位相空間とし，Y を集合とする．$f : X \longrightarrow Y$ を全射写像とする．

$$\mathcal{T} = \{G \subset Y \ : \ f^{-1}(G) \in \mathcal{S}\}$$

は位相の公理を満たす．このとき，$\mathcal{T}$ は $f : X \longrightarrow Y$ を連続にするような位相である．つまり，Y に位相 $\mathcal{T}$ を入れれば，f は常に連続になる．

定義 15. $(X, \mathcal{S})$ を *Hausdorff* 位相空間とする．点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束する（$\lim_{n\to\infty} x_n = x$）とは，任意の $U \in \mathcal{N}_x$ に対して，ある番号 $0 < N \in \mathbb{N}$ が存在して，$x_n \in U \quad (\forall n \geqq N)$ が成り立つとき．このとき，x を点列 $\{x_n\}$ の極限値という．X が *Hausdorff* ならば，極限値はただ一つである．

2　位相ベクトル空間 (Topological Vector Spaces)

2.1　位相ベクトル空間の諸概念

定義 16. E が体 k 上の位相ベクトル空間とは

(1) $E = E/k$ はベクトル空間である.

(2) E は位相空間（E の位相を $\mathcal{S}_E$ とする）であり,

(a) $\forall x \in E$ は閉集合である.

(b) ベクトル空間の加法およびスカラー積の演算は連続である, 即ち,

- $\Phi : E \times E \longrightarrow E$ $\Phi(x, y) = x + y$ は連続写像
- $\Psi : k \times E \longrightarrow E$ $\Psi(\alpha, x) = \alpha x$ は連続写像

即ち, $(x_1, x_2) \in E \times E$ および $x_1 + x_2$ の任意の近傍 $U \subset E$ に対して, E の x_i の近傍 V_i $(i = 1, 2)$ が存在して,

$$V_1 + V_2 \subset U$$

また, $\forall \alpha \in k$, $\forall x \in E$ および任意の αx の近傍 U に対し, α の近傍 $\Delta := \{\lambda \in k \ : \ |\lambda - \alpha| < r\}$ および x の近傍 $V \subset E$ が存在し,

$$\Delta \cdot V \subset U \Longleftrightarrow \lambda \cdot V \subset U \quad (\forall \lambda \in \Delta)$$

ただし, $E \times E$ や $k \times E$ には直積位相を入れる. この位相に関して, Φ, Ψ は連続である.

注意 5. $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ には自然に位相空間の構造を入れる事ができる. $E \times E$ や $k \times E$ にはそれぞれ直積位相 $\mathcal{S}_{E\times E}$, $\mathcal{S}_{k\times E}$ を入れる. 即ち, 任意の開集合 $G \subset E \times E$ に対し, ${}^{\exists}\{U_\lambda\}$, ${}^{\exists}\{V_\nu\} \subset \mathcal{S}_E$ が存在し

$$G = \bigcup_{\lambda,\nu} (U_\lambda \times V_\nu)$$

と表わせる. そのような位相である. $k \times E$ についても直積位相を同様の考えで入れる.

定義 17. 位相ベクトル空間 E の部分集合 $B \subset E$ が有界（*bounded*）であるとは, 任意の $\mathbf{0} \in E$ の近傍 V に対し, ${}^{\exists}s = s_V > 0$ が存在し, $t > s$ なるすべての $t > 0$ に対し, $B \subset tV$.

E を位相ベクトル空間とし，$a \in E$, $0 \neq \lambda \in k$ を取る．

$$T_a : E \longrightarrow E\ ;\ x \mapsto x + a, \quad , \quad M_\lambda : E \longrightarrow E\ ;\ x \mapsto \lambda x$$

とおく．

命題 1. T_a, $M_\lambda : E \longrightarrow E$ は位相同型（*homeomorphism*）である．

Proof. 第 1 成分への射影 $p : E \times E\ : (x_1, x_2) \mapsto x_1$ は連続である．1 点 $a \in E$ は閉集合で p が連続より，$p^{-1}(a) = \{a\} \times E$ は閉集合である．また，

$$\sigma_a : E \longrightarrow E \times E\ ; x \mapsto (a, x)$$

は位相同型で $T_a = \Phi|_{\{a\}\times E} = \Phi \circ \sigma_a$ も位相同型．$M_\lambda = \Psi|_{\{\lambda\}\times E}$ についても同様.

実際，$p \circ \sigma_a = \mathrm{id}|_E$（恒等写像）．$\sigma_a = (p|_{\{a\}\times E})^{-1}$ は位相同型．加法演算 $\Phi : E \times E \longrightarrow E$ の連続性より，$\Phi|_{\{a\}\times E}$ も（全単射）連続. $\square$

注意 6. (1) $G \subset E$ が開集合なら任意の $a \in E$ に対し $a + E$ も開集合であり，逆も正しい．

(2) 任意の $0 \neq \lambda \in k$ に対し $\lambda \cdot G$ もまた開集合である．逆も正しい．

(3) $\mathcal{B}$ を $\mathbf{0} \in E$ の基本近傍系，即ち，W を $\mathbf{0} \in E$ の近傍とすると，${}^{\exists}U(\mathbf{0}) \subset \mathcal{B}$ が存在して，$U(\mathbf{0}) \subset W$ をみたす．そのとき，$\mathcal{B}_a = \{a + U(\mathbf{0})\ :\ U(\mathbf{0}) \in \mathcal{B}\}$ は $a \in E$ の基本近傍系である．

実際，$W = W(a)$ を a の近傍とする．$T_{-a}(W) = -a + W$ は $\mathbf{0}$ を含む開集合より $\mathbf{0}$ の近傍である．よって，${}^{\exists}U(\mathbf{0}) \in \mathcal{B}$ が存在して $U(\mathbf{0}) \subset -a + W$. こうして，$a + U(\mathbf{0}) \subset W$ かつ $a + U(\mathbf{0}) \in \mathcal{B}_a$ より示された．$U(a) = a + U(\mathbf{0})$ と表わすこともある．

定義 18. E を位相ベクトル空間とする．

- E が局所凸（*locally convex*）とは，$\mathbf{0}$ の基本近傍系 ${}^{\exists}\mathcal{B}$ で，各 $U \in \mathcal{B}$ が凸集合であるものが存在するとき．
- E が局所有界（*locally bounded*）であるとは，$\mathbf{0}$ が有界な近傍 $U(\mathbf{0}) \in \mathcal{N}_{\mathbf{0}}$ を持つとき．

- E が局所コンパクト（*locally compact*）であるとは，$^{\exists}U := U(0) \in \mathcal{N}_{\mathbf{0}}$ で $\overline{U}$ がコンパクトであるものが存在する．

- E が *Heine-Borel* の性質をもつとは，E の任意の有界かつ閉集合はコンパクトであるとき．

- E が距離付け可能 *(metrizable)* とは，E の位相 $\mathcal{S}_E$ が E 上の距離 *(metric)*d と両立している（*compatible*）のとき，即ち，任意の開集合 $\Omega \in \mathcal{S}_E$ および $^{\forall}a \in \Omega$ に対して，a 中心の半径 $r > 0$ の開球

  $$B(a,r) = \{x \in E \ : \ d(x,a) < r\}, \qquad \left(\overline{B}(a,r) = \{x \in E \ : \ d(x,a) \leqq r\}\right)$$

  が存在して，$B(a,r) \subset \Omega$ を満たすとき．

定義 19. d がベクトル空間 E 上の距離とは，以下を満たすとき

- $0 \leqq d(x,y) < \infty \ \ (\forall x, y \in E)$
- $d(x,y) = d(y,x)$ かつ $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$
- $d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z) \ \ (\forall x, y, z \in E.$

距離を持つベクトル空間を距離空間（*metric Spaces*）という．

定義 20. $\|\|$ が E 上のノルム（*norm*）であるとは，

- $\|x\| \geqq 0$ かつ $\{x\| = 0 \Longleftrightarrow x = \mathbf{0}$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \ \ (\forall x \in E, \ \lambda \in k)$
- $\|x + y\| \geqq \|x\| + \|y\|$

ノルムを持つベクトル空間をノルム空間（*Normed Spaces*）という．
$d(x,y) := \|x - y\|$ をノルムから決まる距離という．

$$B_1(\mathbf{0}) = \{x \in E \ : \ \|x\| < 1, \quad \overline{B}_1 = \{x \in E \ : \ \|x\| \leqq 1\}$$

をノルム空間の単位開（閉）球という．

2.2　位相ベクトル空間の分離性　について

$E = E/k$ を位相ベクトル空間とする．

命題 2. W を $\mathbf{0} \in E$ の近傍とする．そのとき，次を満たす $\mathbf{0}$ の近傍 U が存在する：

- $U = -U$（*symmetric neighborhood*：対称近傍）
- $U + U \subset W$

Proof. 加法演算 $\Phi : E \times E \longrightarrow E$ は $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ で連続で $\Phi(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ である．よって，$\mathbf{0}$ の近傍である W に対して，$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ の近傍 $V_1 \times V_2$，（但し，V_i $(i = 1, 2)$ は $\mathbf{0}$ の近傍）が存在し，

$$\Phi(V_1 \times V_2) \subset W \Longleftrightarrow V_1 + V_2 \subset W.$$

そこで，

$$U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2) \subset V_i \ \ (i = 1, 2)$$

とおくと，容易に $U = -U$ が分かり，$U + U \subset V_1 + V_2 \subset W$ を得る．W の代わりに U に対して命題を適用すれば

$\mathbf{0}$ の対称近傍 U（$U = -U$）が存在し $U + U + U + U \subset W$. 特に，

$$U + U + U \subset U + U + U + U \quad \text{より} \quad \underline{U + U + U \subset W}$$

を得る． □

定理 1. E を位相ベクトル空間とし，$K \subset E$ はコンパクト集合，$C \subset E$ は閉集合で，$K \cap C = \emptyset$ とする．そのとき，$\mathbf{0}$ の近傍 V で

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$$

を満たすものが存在する．

注意 7. $K + V = \bigcup_{x \in K} (x + V)$ は K を含む開集合である．定理 *1* は K と C を含む互いに交わらない開集合の存在を主張している．

Proof. $K \neq \emptyset$ とする．$x \in K$ をとる．$x \notin C \Longleftrightarrow x \in E \setminus C$ であり，$E \setminus C$ は開集合なので, $\mathbf{0}$ の近傍 U が存在して $(x + V) \subset E \setminus C \Longleftrightarrow (x + U) \cap C = \emptyset$. この U に対して，定理 1 より，$\mathbf{0}$ の対称近傍 V_x $(V_x = -V_x)$ が存在し $(x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \emptyset$ を得る. よって，

$$(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset$$

$(x+V_x+V_x)\cap(C+V_x)=\emptyset$ を示す．実際，$(x+V_x+V_x)\cap(C+V_x)\ni a$ ならば，$a=x+v_1+v_2=c+v_3$（但し，$v_i\in V_x$ $(i=1,2,3)$,$c\in C$）と表わされる．$V_x=-V_x$ より，$-v_3\in V_x$．よって，$c=x+v_1+v_2-v_3\in x+V_x+V_x+V_x$．これは $(x+V_x+V_x+V_x)\cap C=\emptyset$ に反する．

$x+V_x$ は $x\in K$ の開近傍で，$K=\bigcup_{x\in K}(x+V_x)$ を得る．K のコンパクト性から，$^\exists\{x_1,x_2,\dots x_n\}\subset K$ が存在し，

$$K\subset(x_1+V_{x_1})\cup(x_2+V_{x_2})\cdots\cup(x_n+V_{x_n})$$

特に，$(x_i+V_{x_i}+V_{x_i})\cap(C+V_{x_i})=\emptyset$ $(1\leqq i\leqq n)$ である．

$V=V_{x_1}\cap\cdots\cap V_{x_n}$ とおく．そのとき，$V\subset V_{x_i}$ $(1\leqq i\leqq n)$ より，

$$K+V\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+V_{x_i}+V)\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+V_{x_i}+V_{x_i})$$

今，$(x_i+V_{x_i}+V_{x_i})\cap(C+V)\subset(x_i+V_{x_i}+V_{x_i})\cap(C+V_{x_i})=\emptyset$ $(1\leqq i\leqq n)$. であったので，$(K+V)\cap(C+V)=\emptyset$.

□

注意 8. (1) $C+V$ は C を含む開集合ゆえ，$E\setminus(C+V)$ は閉集合であり，

$$(K+V)\cap(C+V)=\emptyset\quad\therefore\quad K+V\subset E\setminus(C+V)$$

よって，閉包を取ると

$$\overline{K+V}\subset\overline{E\setminus(C+V)}=E\setminus(C+V)\Longrightarrow(\overline{K+V})\cap(C+V)=\emptyset\quad\therefore(\overline{K+V})\cap C=\emptyset.$$

特に，位相ベクトル空間の定義から，任意の１点は閉集合であった．また，１点からなる集合はコンパクト部分集合なので，定理 *1* から E は *Hausdorff* 空間である．

(2) $\mathcal{B}$ を $\mathbf{0}$ の基本近傍系とする．$V\in\mathcal{B}$ をとる．そのとき，$^\exists U\in\mathcal{B}$ が存在して，$\overline{U}\subset V$ が分かる．実際，$\mathbf{0}\notin E\setminus V$ は閉集合より，(1) から，$^\exists U(\mathbf{0})\in\mathcal{B}$ が存在し，$\overline{U}\cap(E\setminus V)=\emptyset$ $\therefore$ $\overline{U}\subset V$ である．

(3) *Hausdorff* 空間 E において，任意のコンパクト部分集合 K は閉集合である．実際，$x\notin K\Longleftrightarrow x\in E\setminus K$ をとる．このとき，任意の $a\in K$ に対し，$x\neq a$ ゆえ，E の *Hausdorff* 性から,$U(x)\in\mathcal{N}_x$,　$V(a)\in\mathcal{N}_a$ が存在し，

$U(x) \cap V(a) = \emptyset \quad \& \quad K \subset \bigcup_{a \in K} V(a)$. 今，$K$ のコンパクト性から，有限個の点 $^\exists\{a_1, \ldots, a_n\} \subset K$ が存在し，

$$K \subset V(a_1) \cup V(a_2) \cdots V(a_n).$$

ここに，$U(x) \cap V(a_i) = \emptyset \ (1 \leqq i \leqq n)$ なので

$$U(x) \cap \Big(V(a_1) \cup V(a_2) \cup \cdots \cap V(a_n)\Big) = \emptyset.$$

即ち，

$$U(x) \subset E \setminus \Big(V(a_1) \cup V(a_2) \cup \cdots \cap V(a_n)\Big) \subset E \setminus K$$

こうして，$E \setminus K$ は開集合, 即ち，K は閉集合である

命題 3. E を位相ベクトル空間とする．$\mathbf{0}$ の任意の近傍 $U = U(\mathbf{0})$ は $\mathbf{0}$ のある円板状近傍 $W = W(\mathbf{0})$,（即ち，$|\beta| \leqq 1$ に対して，$\beta W \subset W$ なる近傍 W）を含む.

Proof. スカラー積 $\Psi : k \times E \longrightarrow E$ の $(0, \mathbf{0})$ での連続性から，$0 < \delta \in k$ および $\mathbf{0}$ の近傍 V が存在し，$|\alpha| < \delta$ なる任意の $\alpha \in k$ に対し，$k \cdot V \subset U$ が成り立つ. $W = \bigcup_{\substack{\alpha \in k \\ |\alpha| < \delta}} \alpha V$ とおくと，各 αV は $\mathbf{0}$ の開近傍なので W も $\mathbf{0}$ の開近傍かつ $\alpha V \subset U$ なので，$\underline{\mathbf{0} \in W \subset U}$である．更に，$|\beta| \leqq 1$ を満たす β に対し，$|\beta\alpha| < \delta$ より，$\beta W = \bigcup_{\substack{\alpha \in k \\ |\alpha| < \delta}} \beta\alpha V \subset W$. よって，$W$ は円板状近傍である． □

系 1. $\mathbf{0} \in E$ は円板状近傍からなる基本近傍系をもつ.

命題 4. E を位相ベクトル空間とし，V を $\mathbf{0}$ の一つの近傍とする.

(a) 単調増加列：$0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots \to \infty$ に対し，

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$$

(b) 任意のコンパクト部分集合 $K \subset E$ は有界である．即ち，$s > 0$ が存在し，$t > s$ なる全ての t に対して $K \subset tV$ が成り立つ．特に，K は閉集合であったので，結果，K は有界閉集合.

(c) 更に，V は有界とする．そのとき，単調減少列：$\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_n > \cdots \to 0$ に対して，$\{\delta_n V\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbf{0}$ の基本近傍系である．即ち，

<u>E が局所有界ならば可算基本近傍系を持つ</u>.

Proof. (a) $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$ を示す．$x \in E$ をとる．スカラー積 $\Psi : k \times E \longrightarrow E$ は連続なので，特に，$(0, x)$ でも連続．よって，$0x = \mathbf{0} \in E$ の近傍 V に対し，近傍 $W = W(\mathbf{0})$ および $\epsilon > 0$ が存在し，$|\lambda| < \epsilon$ なる任意の λ に対して，$\lambda\,(x + W) \subset V$ を得る．特に，$\lambda x \in V$. 今，$r_n \epsilon > 1$ なる r_n を選ぶと，$\{\frac{1}{r_n}, \frac{1}{r_{n+1}}, \ldots\} \subset \{|\lambda| < \epsilon\}$ なので，$\frac{1}{r_n} x \in V$. 故に，

$$x \in r_n V \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V \quad \therefore \quad E = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$$

を得る． □

(b) 任意の近傍 $U = U(\mathbf{0})$ に対し，円板状近傍 $V = V(\mathbf{0})$ で $V \subset U$ なるものをとり，この V に対し，(a) を適用する．$K \subset E = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$ かつ K がコンパクトゆえ，

$$K \subset (r_{n_1} V) \cup \cdots \cup (r_{n_m} V)$$

今，$r_{n_1} < \cdots < r_{n_m}$ と仮定してもよい．このとき，$\dfrac{r_{n_j}}{r_{n_m}} < 1$ ゆえ，

$$\frac{r_{n_j}}{r_{n_m}} V \subset V \Longrightarrow r_{n_j} V \subset r_{n_m} V.$$

よって，$K \subset r_{n_m} V$. 今，<u>$t > r_{n_m}$</u>に対し，V が円板状近傍ゆえ，

$$\frac{r_{n_m}}{t} V \subset V \Longrightarrow r_{n_m} V \subset tV.$$

こうして，$K \subset r_{n_m} V \subset tV \subset tU$ が成り立ち，K は有界である． □

(c) $U = U(\mathbf{0})$ を 0 の近傍とする．V が有界より，$s > 0$ が存在し，$t > s$ に対し，$V \subset tU$．$s\delta_n < 1$ なる δ_n に対し，$s < \dfrac{1}{\delta_n} < \dfrac{1}{\delta_{n+1}}, \cdots$ より，

$$V \subset \frac{1}{\delta_n} U \quad \therefore \quad \delta_n V \subset U$$

. こうして，$\{\delta_n V\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbf{0}$ の基本近傍系である．

□

3　位相ベクトル空間の有限次元性について

定理 2. 局所コンパクト位相ベクトル空間は有限次元である。

命題 5. $F \subset E$ を局所コンパクト部分空間とする．そのとき，F は閉集合である．

Proof.　(i) F には相対位相を入れる．そのとき, F は局所コンパクトより, $\mathbf{0} \in F$ のコンパクト近傍 $K \subset F$ で K の内点集合 $\overset{\circ}{K} \subset F$ が $\mathbf{0}$ の F に於ける開近傍であるものが存在する．相対位相の定義から, E の開集合 U で, $U \cap F = \overset{\circ}{K} \subset K$ なるものが存在する．特に，$U = U(\mathbf{0})$ は $\mathbf{0}$ の E に於ける開近傍である．

(ii) 任意の $x \in E$ に対して，近傍 $V = V(\mathbf{0})$ が存在して，$(x + \overline{V}) \cap K$ がコンパクトであることを示す：実際, U に対し，命題 2 および注意 8-(2) から, $V = -V$ かつ $\overline{V} + \overline{V} \subset U$ なる $\mathbf{0}$ の E での近傍 V が存在する．$y_0 \in (x + \overline{V}) \cap K$ を固定する．そのとき，任意の $\forall y \in (x + \overline{V}) \cap K$ に対し，$y_0,\ y \in x + \overline{V}$ より，$y_0 - x,\ y - x \in \overline{V}$．ここで，$\overline{V} = -\overline{V}$ より，

$$y - y_0 = (y - x) - (y_0 - x) \in \overline{V} - \overline{V} = \overline{V} + \overline{V} \subset U$$

を得る．一方，F は部分空間より，$y - y_0 \in F$. よって，$y - y_0 \in U \cap F \subset K$. よって，$y \in y_0 + K$. ここで，$y$ の任意性から，$(x + \overline{V}) \cap K \subset (y_0 + K)$ を得る. 一方，$y_0 + K$ は Y のコンパクト部分集合で，$(x + \overline{V}) \cap F$ は F の閉部分集合なので，$(x + \overline{V}) \cap K$ は F のコンパクト部分集合である．

注意 9. 位相空間 X において，コンパクト集合 $K \subset X$ に含まれる X の閉部分集合 Y はまた X のコンパクト部分集合である．
$(\because)$ $Y = \bigcup_{\lambda} U_\lambda$ を任意の開被覆（U_α は X の開集合）とする．今, $K \backslash Y = K \cap (X \setminus Y)$ は K の開集合である（相対位相の定義）.

$$K = (K \setminus Y) \cup Y = (K \setminus Y) \cup \bigcup_{\lambda} U_\lambda$$

は K の開被覆である．K のコンパクト性から有限個の被覆 $\{U_{\lambda_j}\}_{j=1}^{k}$ があって,

$$K = (K \setminus Y) \bigcup_{j=1}^{k} U_{\lambda_j} \Longrightarrow Y = \bigcup_{j=1}^{k} U_{\lambda_j}$$

(iii) $\overline{F} = F$ を示せば証明は完結する．実際，任意の $y \in \overline{F}$ をとる．そこで,

$$\mathcal{B} = \{W = W(\mathbf{0})\ :\ W \text{ は } \mathbf{0} \text{ の開近傍で } W \subset V\}$$

とおき，

$$C_W := F \cap (y + \overline{W}) \subset F \cap (y + \overline{V})$$

とおけば（(ii) に於いて，x を y と思う)，C_W はコンパクト集合 $F \cap (y + \overline{V})$ の閉部分集合なので，コンパクトである．$y \in \overline{F}$ より，y は F の集積点である．よって，y の近傍 $y + W$ に対し，

$$\emptyset \neq \big((y + W)\big) \cap (F \setminus \{y\}) \subset (y + \overline{W}) \cap F = C_W$$

より，$C_W \neq \emptyset$ を得る．このことから，$\underline{\bigcap_{W \in \mathcal{B}} C_W \neq \emptyset}$ を得る．

実際，$\bigcap_{W \in \mathcal{B}} C_W = \emptyset$ ならば，$\bigcup_{W \in \mathcal{B}} (G \setminus C_W) = G$，ここに，$G = F \cap (x + \overline{V})$（コンパクト集合）．$G \setminus C_W$ は開集合で G はコンパクトゆえ，有限被覆 $W_1, \ldots W_k \in \mathcal{B}$ が存在し，$G = \bigcup_{i=1}^{k} (G \setminus C_{W_i})$．こうして，$\bigcap_i C_{W_i} = \emptyset$.
一方，$W = W_1 \cap \cdots \cap W_k$ と置くと，$W \in \mathcal{B}$ かつ $\emptyset \neq C_W \subset \bigcap_{i=1}^{k} C_{W_i} = \emptyset$.
これは矛盾である．

よって，${}^{\exists} z \in \bigcap_{W \in \mathcal{B}} C_W$.

このとき，$z \in F$ かつ全ての $W \in \mathcal{B}$ に対し，$z \in (y + \overline{W})$ が成立．故に，

$$\underline{z - y \in \bigcap_{W \in \mathcal{B}} \overline{W} = \{\mathbf{0}\}}.$$

$\bigcap_{W \in \mathcal{B}} \overline{W} = \{\mathbf{0}\}$ を示す．$\bigcap_{W \in \mathcal{B}} \overline{W} \neq \{\mathbf{0}\}$ とすると，$\mathbf{0} \neq {}^{\exists} x \in \bigcap_{W \in \mathcal{B}} \overline{W}$.
故に，全ての $W \in \mathcal{B}$ に対して，$x \in \overline{W}$ を得る．E は Hausdorff ゆえ，$\mathbf{0}$ の近傍 $W_1, W_2 \in \mathcal{B}$ が存在し，$W_1 \cap (x + W_2) = \emptyset$. よって，

$$W_1 \subset E \setminus (x + W_2) \quad \therefore \overline{W}_1 \subset \overline{E \setminus (x + W_2)} = E \setminus (x + W_2).$$

よって，$\overline{W}_1 \cap (x + W_2) = \emptyset$. 故に，$x \notin \overline{W}_1$．これは矛盾である．

こうして，$y = z \in F$. ゆえに，$\overline{F} \subset F$ が示された．

$\square$

命題 6. $\varphi : E \longrightarrow k$ を位相ベクトル空間 E 上の線形汎関数とする．$\varphi \not\equiv 0$（$\varphi(x) \neq 0$ *for some* $x \in E$）と仮定する．

(a) φ は連続である．

(b) $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in E \ : \ \varphi(x) = 0\}$ は閉集合

(c) $\operatorname{Ker}\varphi$ は E で稠密でない．

(d) φ は $\mathbf{0}$ のある近傍 $V = V(\mathbf{0})$ で有界．

Proof. $(a) \to (b)$: $\{0\} \in k$ は閉集合で φ は連続ゆえ，$\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(0)$ は閉集合（連続写像による閉集合の逆像は閉集合）である．.

$(b) \to (c)$:仮定から $\operatorname{Ker}\varphi = \overline{\operatorname{Ker}\varphi} \neq E$ から従う．

$(c) \to (d)$:仮定より $E \setminus \operatorname{Ker}\varphi$ は内点 $\{x\}$ をを持つ．よって，$\mathbf{0}$ の円板状近傍 V が存在し，

$$(*) \qquad (x + V) \cap \operatorname{Ker}\varphi = \emptyset.$$

今，φ の線形性から $\varphi(V) \subset k$ もまた円板状近傍である．$\varphi(V)$ が有界であることを言えば (d) は示される．そこで，$\varphi(V)$ を有界でないとすれば，$\varphi(V) = k$ である．$-\varphi(x) \in k$ より，$y \in V$ が存在し，

$$\varphi(y) = -\varphi(x) \Longrightarrow \varphi(x+y) = 0 \Longrightarrow x+y \in \operatorname{Ker}\varphi \Longrightarrow x+y \in (x+V) \cap \operatorname{Ker}\varphi \neq \emptyset$$

矛盾である．よって，$\varphi(V)$ は有界である．

$(d) \to (a)$:仮定から $M > 0$ が存在し，全ての $x \in V$ に対して，$|\varphi(x)| < M$. 任意の $r > 0$ に対し，$W = (\dfrac{r}{M})V$ は $\mathbf{0}$ の開近傍で $|\varphi(x)| < r$ が全ての $x \in W$ について成り立つ．即ち，$\varphi(W) \subset \{z \in k \ : \ |z| < r\}$. このことは，$\varphi$ が $\mathbf{0}$ で連続であることを示している．よって，φ は連続である．

注意 10. 位相ベクトル空間の線形写像 $f : E \longrightarrow F$ は $\mathbf{0}$ で連続ならば f は連続である．実際，任意の開集合 $\Omega \subset F$ に対し，$f^{-1}(\Omega) \ni x$ を任意にとる．$f(x) \in \Omega$ の近傍 $(f(x) + W(\mathbf{0}))$（$W = W(\mathbf{0})$ は $\mathbf{0}$ のある近傍）が存在し $(f(x) + W(\mathbf{0})) \subset \Omega$ を満たす．このとき，$\mathbf{0}$ での連続性から，$W = W(\mathbf{0})$ に対し，$V(\mathbf{0}) \subset E$ があって，$f(V) \subset W$ を得る．$f(x+V) \subset (f(x) + f(V)) \subset (x + W) \subset \Omega$. よって，$f$ は連続である．

位相空間の写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続とは，任意の開集合 $V \subset Y$ に対して，開集合 $U \subset X$ が存在して，$f(U) \subset V$ を満たすとき．

□

命題 7. $E = E_{\mathbb{C}}$ を複素位相ベクトル空間とする．$F \subset E$ を部分空間とし, $\dim_{\mathbb{C}} F = n < \infty$ とする．その時,

(a) 任意の線形同型写像 $\varphi : \mathbb{C}^n \cong F$ は位相同型である．

(b) F は閉部分集合である．

Proof. まず，(a) が示されると，$\mathbb{C}^n$ が局所コンパクトゆえ，F は局所コンパクトである．命題 5 より，F は閉集合となり，(b) が従う．命題 7 を部分空間の次元 n に関する命題 $P(n)$ とし，数学的帰納法で示す．$n = 1$ のとき，$\varphi : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} F$ を線形同型とする．$\varphi(1) = u$ とおくと，$\varphi(\alpha) = \alpha\, u$. 一方，$\Psi : \mathbb{C} \times F \longrightarrow F : (\alpha, u) \mapsto \alpha\, u$ の連続性から，$\Psi_u : \mathbb{C} \times \{u\} \longrightarrow F$ は連続．$h_u : \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \{u\}$ は位相同型ゆえ，$\varphi(\alpha) = \Psi_u \circ h_u(\alpha) = \alpha u$ は全単射連続である．$\psi := \varphi^{-1} : F \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ は線形汎函数 (linear functional: linear form）とみることができる．$\operatorname{Ker} \psi = \varphi(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\} \neq F$ よって，$\mathbf{0} \neq^{\exists} y \in F$ が存在する．ハウスドルフ性から，$\mathbf{0}$ の近傍 $V(\mathbf{0})$ が存在し，$\mathbf{0} \notin (y + V(\mathbf{0}))$. ここで，$V = V(\mathbf{0})$ は円板状近傍を取ることができる．このとき，$\psi(V) \subset \mathbb{C}$ もまた円板状近傍（実は円板）. 今，$\psi(V)$ は有界である．

実際，$\psi(V)$ は円板より，$\psi(V)$ が有界でなければ，$\psi(V) = \mathbb{C}$（全体）である．一方，$-\psi(y) \in \mathbb{C} = \psi(V)$ より，$x \in V$ が存在し

$$-\psi(y) = \psi(x) \quad \therefore\ 0 = \psi(x) + \psi(y) = \psi(x + y).$$

よって，$x + y \in \operatorname{Ker} \psi = \{\mathbf{0}\} \quad \therefore\ \ \mathbf{0} = y + x \in y + V \not\ni \mathbf{0}$. これは矛盾である．

よって，$M > 0$ が存在し，$|\psi(x)| < M$ が全ての $x \in V$ に対して成り立つ．任意の $r > 0$ に対し，$W := \left(\dfrac{r}{M}\right) V$ とおくと,

$$\psi(W) = \left(\frac{r}{M}\right) \psi(V) \subset \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < r\}$$

これは $0 = \psi(\mathbf{0})$ の任意の近傍 $\Delta(0, r) = \{|z| < r\}$ に対し，$\mathbf{0}$ の近傍 W があって，$\psi(W) \subset \Delta(0, r)$ であることを示していて，まさに，ψ の $\mathbf{0}$ での連続性を示している．以上より，φ は位相同型である．故に，$P(1)$ は正しい．

次に，$P(n-1)$ は正しいと仮定する．(a) を示す．今，$\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow F$ を任意の線形同型写像とする．$\mathbf{e}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ を $\mathbb{C}^n$ の標準ベクトル（第 i 成分が 1 でその他の成分は 0）とし，$u_i = \varphi(\mathbf{e}_i)$ とおく．そのとき,

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

$\Psi_{u_i} : \mathbb{C} \times \{u_i\} \longrightarrow F \;\; (\alpha_i, u_i) \mapsto \alpha_i u_i$ はスカラー積 $\Psi : \mathbb{C} \times F \longrightarrow Y$ の連続性から連続である．また，加法の連続性から $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ は連続写像である．

$$(\mathbb{C} \times \{u_i\}) \times (\mathbb{C} \times \{u_j\}) \longrightarrow F \times F \longrightarrow F$$

$$(\alpha_i, u_i) \times (a_j, u_j) \mapsto (\alpha_i u_i, \alpha_j u_j) \mapsto \alpha_i u_i + \alpha_j u_j$$

一般に，合成写像

$$\mathbb{C}^n \cong (\mathbb{C} \times \{u_1\}) \times \cdots \times (\mathbb{C} \times \{u_n\}) \longrightarrow F \times \cdots \times F \longrightarrow F$$

は連続である．

今，$\varphi : \mathbb{C}^n \to F$ は線形同型ゆえ，$\{u_1, \ldots, u_n\}$ は Y の一つの基底である．よって，任意の $x \in F$ は一意的に

$$x = \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_n u_n$$

と表わされる．このとき，$\gamma_i \ (1 \leqq i \leqq n)$ は x に対して一意的に決まる複素数なので，$\gamma_i = \gamma_i(x) \ (1 \leqq i \leqq n)$ は x の（複素数値）関数 $\gamma_j : F \longrightarrow \mathbb{C}$ とみる事ができる．実を言えば，γ_i は汎関数（functionals）と言われるものである．

$$\begin{aligned} x &= \gamma_1(x) u_1 + \cdots + \gamma_n(x) u_n \\ y &= \gamma_1(y) u_1 + \cdots + \gamma_n(y) u_n \\ x + y &= \gamma_1(x+y) u_1 + \cdots + \gamma_n(x+y) u_n \end{aligned}$$

これらの表現の一意性から

$$\gamma_i(x+y) = \gamma_i(x) + \gamma_i(y) \ (1 \leqq i \leqq n)$$

同様に

$$\gamma_i(\alpha x) = \alpha \gamma_i(x) \ (1 \leqq i \leqq n).$$

よって，各 γ_i は線形汎関数である．

$$\operatorname{Ker} \gamma_i = \{x \in Y \ : \ \gamma_i(x) = 0\}$$

とおく．$x \in \operatorname{Ker} \gamma_i$ に対し，

$$x = \gamma_1(x) u_1 + \cdots \gamma_{i-1}(x) u_{i-1} + \gamma_{i+1}(x) u_{i+1} + \cdots \gamma_n(x) u_n$$

と一意的に表わされるので，$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} \gamma_i = n-1$ で帰納法の仮定 $P(n-1)$ から $\operatorname{Ker} \gamma_i$ は閉集合．よって，命題 6 から γ_i は連続である．こうして，

$$\varphi^{-1}(x) = (\gamma_1(x), \ldots, \gamma_n(x)) \ \ (x \in Y)$$

は連続である．一方，φ は連続であったので，結果として φ は位相同型である．従って，$P(n)$ は正しい．以上より，命題の証明は完結する． □

定理 3. 局所コンパクト位相ベクトル空間 E は有限次元である．

Proof. 仮定から，$\mathbf{0}$ の近傍 V でその閉包 $\overline{V}$ がコンパクトであるものが存在する．命題 4-(b) より，V は有界である．命題 4-(c) より，$\{\frac{1}{2^n}V\}_n$ は $\mathbf{0}$ の基本近傍系である．

$$\overline{V} \subset \bigcup_{x \in E} \left(x + \frac{1}{2}V \right)$$

で $\overline{V}$ はコンパクトなので，$x_1, \ldots, x_m \in E$ が存在し，

$$\overline{V} \subset \left(x_1 + \frac{1}{2}V \right) \cup \cdots \cup \left(x_m + \frac{1}{2}V \right)$$

そこで，$x_1, \ldots, x_m$ で張られるベクトル空間を $Y = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ とおく．Y は有限次元 $\dim Y \leqq n$ なので Y は閉集合である．$x_j \in Y \ \ (1 \leqq j \leqq m)$ なので，

$$V \subset \overline{V} \subset Y + \frac{1}{2}V \ \text{ かつ } \ \lambda Y = Y \ \ (\forall \lambda \in \mathbb{C})$$

より，

$$\frac{1}{2}V \subset \frac{1}{2}Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V \Longrightarrow V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V$$

この操作を繰り返せば，

$$V \subset \bigcap \left(Y + \frac{1}{2^n}V \right)$$

今，$\overline{Y} = \displaystyle\bigcap_{\forall W = W(0)} (Y + W)$ かつ $\{\frac{1}{2^n}V\}_n$ が $\mathbf{0}$ の基本近傍ゆえ，$Y + W \supset Y + \frac{1}{2^n}V$ を得る．よって，$\overline{Y} \supset \displaystyle\bigcap_{n \geqq 1} \left(Y + \frac{1}{2^n}V \right) \supset V$. 今，$Y = \overline{Y}$ なので，

$$V \subset Y \quad \therefore \ \ kV \subset kY = Y \ (k \geqq 1)$$

命題 4-(a) より，$E = \bigcup_k kV \subset Y$. よって，$E = Y$. 即ち，$\dim_{\mathbb{C}} E \leqq m$. □

- $A \subset E \Longrightarrow \overline{A} = \displaystyle\bigcap_{\forall V = V(\mathbf{0})} (A+V)$. 実際,

$$x \in \overline{A} \iff (x+V) \cap A \neq \emptyset \text{ が全ての } \mathbf{0} \text{ の近傍 } V \text{ に対して成立する.}$$
$$\iff x \in A - V; \text{が全ての } \mathbf{0} \text{ の近傍 } V \text{ に対して成立する.}$$

$-V$ は $\mathbf{0}$ の近傍であることと，V が $\mathbf{0}$ の近傍であることは同値．即ち，$\{V = V(0) \in \mathcal{N}_{\mathbf{0}}\} = \{-V \ : V \in \mathcal{N}_{\mathbf{0}}\}$. よって,

$$\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{N}} (A - V) = \bigcap_{V \in \mathcal{N}} (A + V)\,.$$

- $A \subset E$ が有界ならば，$\overline{A}$ もまた有界である．実際，$V = V(\mathbf{0})$ を $\mathbf{0}$ の近傍とする．そのとき，$\overline{W} \subset V$ なる近傍 $W(\mathbf{0})$ が存在する．A が有界より, この $W(\mathbf{0})$ に対し，$^{\exists}s > 0$ が存在して，$t > s$ に対し,

$$A \subset tW \quad \therefore\ \overline{A} \subset t\overline{W} \subset tV.$$

よって，$\overline{A}$ は有界である.

系 2. *Heine-Borel* 性をもつ局所有界位相ベクトル空間 E は有限次元である.

Proof. E の局所有界性から $\mathbf{0}$ は有界な近傍 $V = V(\mathbf{0})$ をもつ．このとき，$\overline{V}$ もまた有界である．こうして，$\overline{V}$ は有界閉集合である．Haine-Borel 性から，$\overline{V}$ はコンパクトである．こうして，E は局所コンパクトであり，故に，有限次元である． □

4 開写像定理

定理 4 (開写像定理). E, F を $\mathbb{R}$ 上の完備な位相ベクトル空間かつ可算基本近傍系をもつ．更に，F は *Hausdorff* とする．$\varphi : E \longrightarrow F$ を全射連続線形写像とする．このとき，φ は開写像である，即ち，任意の開集合 $B \subset E$ に対し，$\varphi(B)$ は F の開集合である．

注意 11.
- 位相空間 E が完備とは，任意のコーシー列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ が E で収束するときをいう．
- $\{x_n\}$ がコーシー列とは，$\mathbf{0}$ の任意の近傍 $U = U(\mathbf{0})$ に対し，ある番号 $N = N_U > 0$ が存在し，$\{x_m - x_n\}_{m,n \geqq N} \subset U$ を満たすとき．特に，$\{V_\nu\}$ を $\mathbf{0}$ の可算基本近傍系とする．任意の V_ν に対して，番号 $N = N(\nu) > 0$ が存在して，$\{x_m - x_n\}_{m,n \geqq N} \subset V_\nu$.

完備性は位相ベクトル空間が可算基本近傍系を持つときに取り扱いが容易. それ以外の場合は「フィルタ」の概念が必要となる.

Proof. 証明は幾つかのステップに分けて行う．

Step 1. $U = U(\mathbf{0}) \subset E$ を $\mathbf{0}$ の近傍とする．そのとき，$\mathbf{0} = \varphi(\mathbf{0}) \in F$ は $\overline{\varphi(U)}$ の内点である．即ち，$\mathbf{0}$ の開近傍 $V = V(\mathbf{0}) \subset F$ が存在して，$V \subset \overline{\varphi(U)}$ を満たす．

まず，次を示す．

(1) 任意の開近傍 $U = U(\mathbf{0})$ に対して $\overline{\varphi(U)}^{\circ} \neq \emptyset$ ならば，$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in F$ は $\overline{\varphi(U)}$ の内点である．

（証明）　$U = U(\mathbf{0})$ を開近傍とする．そのとき，$\mathbf{0}$ の対称近傍 $W = (-W)$ が存在し，

$$W + W = W - W \subset U$$

とできる．W は $\mathbf{0}$ の開近傍ゆえ，仮定から，$\overline{\varphi(W)}^{\circ} \neq \emptyset$ である．

(Claim A)　$\varphi(W) \cap \overline{\varphi(W)}^{\circ} \neq \emptyset$.

$(\because)$ $\varphi(W) \cap \overline{\varphi(W)}^{\circ} = \emptyset \Longrightarrow \varphi(W) \subset F \setminus \overline{\varphi(W)}^{\circ}$.

$F \setminus \overline{\varphi(W)}^{\circ}$ は F の閉集合ゆえ，$\overline{F \setminus \overline{\varphi(W)}^{\circ}} = F \setminus \overline{\varphi(W)}^{\circ}$.

$$\therefore \ \overline{\varphi(W)} \subset \overline{F \setminus \overline{\varphi(W)}^{\circ}} = F \setminus \overline{\varphi(W)}^{\circ}.$$

故に

$$\overline{\varphi(W)}^{\circ} \subset \overline{\varphi(W)} \subset \overline{F \setminus \overline{\varphi(W)}^{\circ}} = F \setminus \overline{\varphi(W)}^{\circ}$$

これは，矛盾である． □

こうして，${}^{\exists}y_0 \in \varphi(W) \cap \overline{\varphi(W)}^{\circ} \subset \varphi(W)$ が存在する．よって，${}^{\exists}x_0 \in W$ があって，$y_0 = \varphi(x_0) \in \varphi(W) \cap \overline{\varphi(W)}^{\circ}$ をみたす.$\varphi(\mathbf{0})$ が閉集合ゆえ，$V := \overline{\varphi(W)}^{\circ} - \varphi(x_0)$ は $\mathbf{0} \in F$ の開近傍であり，

$$\begin{aligned} V = \overline{\varphi(W)}^{\circ} - \varphi(x_0) &\subset \overline{\varphi(W)} - \varphi(x_0) = \overline{\varphi(W)} - \overline{\varphi(x_0)} \\ &\subset \overline{\varphi(W - x_0)} \subset \overline{\varphi(W - W)} \\ &\subset \overline{\varphi(U)}. \end{aligned}$$

これは，$\mathbf{0}$ が $\overline{\varphi(U)}$ の内点であることを示している． □

注意 12. 参考までに，$\overline{\varphi(W)} - \overline{\varphi(x_0)} \subset \overline{\varphi(W - x_0)}$ を示そう．$A, B \subset E \Longrightarrow \overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$ を示せばよい.

実際, $a \in \overline{A},\ b \in \overline{B}$ に対し, $a+b \in E$ の近傍を W とする．加法 $\Phi : E \times E \longrightarrow E$ は (a, b) で連続より, a および b の近傍 $W_1,\ W_2$ が存在し, $W_1 + W_2 \subset W$ を満たす.　$a \in \overline{A},\ b \in \overline{B}$ より, ${}^{\exists}x \in (W_1 \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset,\ {}^{\exists}y \in (W_2 \setminus \{b\}) \cap B \neq \emptyset$. そのとき,

$$x + y \in (A \cap W_1) + (B \cap W_2) \subset (A + B) \cap (W_1 + W_2) \subset (A + B) \cap W$$

特に，$(A + B) \cap (W \setminus \{a + b\}) \neq \emptyset$ より

$$a + b \in \overline{A + B} \quad \therefore\ \overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}.$$

□

次に,

(2) 任意の $U = U(\mathbf{0})$ に対して，$\overline{\varphi(U)}^{\circ} \neq \emptyset$ である.

（証明）　背理法で示す．ある開近傍 $U = U(\mathbf{0})$ があって，$\overline{\varphi(U)}^{\circ} = \emptyset$ と仮定する．このとき，$\varphi(U)$ は F における疎集合（nowhere dense：その閉包が内点を持たない集合のこと）である．この U に対し，円板状近傍 $V = V(\mathbf{0})$ が存在し，$V \subset U$ とできる.

（註）　V が円板状近傍とは，$\lvert\lambda\rvert < 1$ に対し，$\lambda V \subset V$ となる開近傍のことである．

いま，$\varphi(V) \subset \varphi(U)$ なので，$\overline{\varphi(V)}^{\circ} \subset \overline{\varphi(U)}^{\circ} = \emptyset$，よって，$\overline{\varphi(V)}^{\circ} = \emptyset$．こうして，$\varphi(V)$ も疎集合である．今，$V_n = nV$ $(n \in \mathbb{N})$ とおくと，V は円板状近傍なので，$V_n \subset V_{n+1}$ を得る．

(Claim B) $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

$(\because)$ $x \in E$ をとる．$\Psi_x : \mathbb{R} \longrightarrow E \ : \ (\lambda, x) \mapsto \lambda x)$ は連続であった，特に，$0 \in \mathbb{R}$ で連続である．ゆえ，V に対し $0 \in \mathbb{R}$ の近傍 $\{\lvert\lambda\rvert < \epsilon\}$ が存在し，$\Psi_x(\{\lvert\lambda\rvert < \epsilon\}) \subset V$. よって，$\lambda x \in V$ が $\lvert\lambda\rvert < \epsilon$ に対して言える．　$n > \dfrac{1}{\epsilon}$ なる n を選ぶ．そのとき，$\dfrac{1}{n} < \epsilon$ なので，$\dfrac{x}{n} \in V$．よって，$x \in nV \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.
よって，$E \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subset E$. □

一方，$\varphi : E \longrightarrow F$ の全射性から

$$F = \varphi(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(nV) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\varphi(V)$$

いま，$\varphi(V)$ が疎集合より，$n\varphi(V) \cong \varphi(V)$ もまた疎集合である．　これは，次の Baire category theorem に矛盾する．故に，$\overline{\varphi(U)}^{\circ} \neq \emptyset$ である．　□

定理 5 (Baire category theorem)**.** F を $\mathbb{R}$ 上の完備な位相線形空間で可算近傍系をもつとする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$M_n \subset F$ は疎集合で $M_n \subset M_{n+1}$ とする．そのとき，$F \neq \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

Proof. $\mathcal{B} = \{V_\nu\}$ を F の可算近傍系とする．M_1 は閉集合より，$F \setminus M_1$ は開集合である．$F \setminus M_1 \neq \emptyset$.（実際，そうでなければ，$F = M_1$．一方，$F$ は内点をもつので矛盾）．よって，${}^{\exists}x_1 \in F \setminus M_1$. よって，$\mathbf{0}$ の近傍 U_1 があって，$x_1 + U_1 \subset F \setminus M_1$. このとき，${}^{\exists}V_{\nu_1} \in \mathcal{B}$ があって，$V_{\nu_1} + V_{\nu_1} \subset U_1$. よって，

$$x_1 + V_{\nu_1} + V_{\nu_1} \subset x_1 + U_1 \subset F \setminus M_1.$$

M_2 は内点を持たないので，$(x_1 + V_{\nu_1}) \setminus M_2 \neq \emptyset$ は開集合である．よって，${}^{\exists}x_2 \in (x_1 + V_{\nu_1}) \setminus M_2$．そのとき, $\mathbf{0}$ の近傍 U_2 があって, $x_2 + U_2 \subset (x_1 + V_{\nu_1}) \setminus M_2$.

この U_2 に対して，$V_{\nu_2} \in B$ があって，$V_{\nu_2} + V_{\nu_2} \subset U_2$. よって，

$$x_2 + V_{\nu_2} + V_{\nu_2} \subset x_2 + U_2 \subset (x_1 + V_{\nu_1}) \setminus M_2$$

以下同様に，${}^{\exists}x_n \in (x_{n-1} + V_{\nu_{n-1}}) \setminus M_n$ および $V_{\nu_n} \in \mathcal{B}$ があって，

$$x_n + V_{\nu_n} + V_{\nu_n} \subset (x_{n-1} + V_{\nu_{n-1}}) \setminus M_n$$

$W_n = V_{\nu_n}$ とおく．$\{W_n\} \subset \mathcal{B}$. そのとき，

$$x_n + W_n + W_n \subset (x_{n-1} + W_{n-1}) \setminus M_n \ \ (n > 1).$$

構成法から，

$$\begin{cases} x_{n-1} + W_{n-1} \subset x_{n-2} + W_{n-2} \subset \cdots \subset x_1 + W_1 \\ M_1 \subset M_2 \subset \cdots \end{cases}$$

より，m を任意にとり固定する．そのとき，$n > m$ に対して，

$$x_n + W_n + W_n \subset (x_m + W_m) \setminus M_m$$

よって，$n > m$ に対して，

$$x_n \in x_m + W_m \Longrightarrow x_n - x_m \in W_m \ \ (n > m).$$

よって，$\{x_n\}$ はコーシー列である．F の完備性から，$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in F$.
W_m に対して，番号 N があって，$n > N > m$ に対し，$x_n - x_0 \in W_m$ とできる．$x_n - x_m \in W_m \ \ (n > m) \Longrightarrow x_n \in x_m + W_m \ \ (n > m)$. よって，

$$x_0 \in x_m + \overline{W}_m \subset x_m + W_m + W_m \subset (x_{m-1} + W_{m-1}) \setminus M_m \subset \cdots \subset (x_1 + W_1) \setminus M_1$$

こうして，

$$x_0 \notin M_1, M_2, \cdots M_m \ \ (m > 1)$$

よって，$m > 1$ に対して，$x_0 \notin M_m$．こうして，$x_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ を得る．このことは，$F \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ を意味し，仮定に反する．以上で証明は終わる． □

Step 2. $\mathbf{0} \in F$ が $\overline{\varphi(U)}$ の内点ならば，$\mathbf{0}$ は $\varphi(U)$ の内点である．

実際，$U=U(\mathbf{0})\subset E$ を任意の近傍とする．$\mathcal{B}=\{V_\nu\}$ を $\mathbf{0}$ の可算基本近傍系とする．加法の連続性から，$\mathbf{0}$ の近傍 W が存在し，$W+W\subset U$ を満たす．この W に対して，${}^\exists V_1\in\mathcal{B}$ を選んで，$V_1+V_1\subset W\subset U$ とできる．これを続けて $V_{\nu-1}$ について，同様に，${}^\exists V_\nu\in\mathcal{B}$ があって，$V_\nu+V_\nu\subset V_{\nu-1}$ とできる．こうして，

$$\begin{cases} V_1+V_1+V_1+V_1\subset U \\ V_\nu+V_\nu\subset V_{\nu-1} \end{cases}$$

を得る．そのとき，

$$\begin{cases} (a) \quad \overline{V_1+V_1}\subset V_1+V_1+V_1+V_1\subset U \\ (b) \quad V_\nu+V_{\nu+1}+\cdots+V_\mu\subset V_\nu+V_\nu \;\; (\mu>\nu) \end{cases}$$

とできる．

注意 13. (a) については，任意に $x\in\overline{V_1+V_2}$ をとる．そのとき，$W=-W$ かつ $W+W\subset V_1$ をみたす近傍 W が存在することは既にしめした．. この W について，$(x+W)\cap(V_1+V_2)\neq\emptyset$. 今, $x\neq y\in(x+W)\cap(V_1+V_2)$ をとる．$y=x+w_1=v_1'+v_1''$ なる $w_1\in W, v_1', v_1^{"}\in V_1$ が存在する．

$$x=-w_1+v_1'+v_1''\in W+V_1+V_2\subset V_1+V_1+V_1\subset V_1+V_1+V_1+V_1$$

より示された．

(b) については, 加法の連続性より, $V_{\nu+1}+\cdots+V_\mu\subset V_\nu$ なる $V_{\nu+1}\in\mathcal{B},\cdots,V_\mu\in\mathcal{B}$ が取れることから分かる．

仮定より，任意の $U=U(\mathbf{0})$ に対し，$\mathbf{0}$ は $\overline{\varphi(U)}^\circ$ の内点ゆえ，$\overline{\varphi(V_\nu)}^\circ$ は $\mathbf{0}$ の開近傍である．

（Claim C） $\{\overline{\varphi(V_\nu)}^\circ\}$ は $\mathbf{0}\in F$ の可算（基本）近傍系である．

実際，$W=W(\mathbf{0})\subset F$ を $\mathbf{0}$ の開近傍とする．そのとき，加法の連続性から $W_1+W_1\subset W$ なる近傍 $W_1=W_1(\mathbf{0})$ が存在する．$\varphi:E\longrightarrow F$ の連続性から $V_\nu\in\mathcal{B}$ が存在して，$\varphi(V_\nu)\subset W_1$.

$$\therefore\ \overline{\varphi(V_\nu)}^\circ\subset\overline{W_1}^\circ\subset\overline{W_1}\subset W_1+W_1\subset W.$$

こうして，$\{\overline{\varphi(V_\nu)}^\circ\}$ は $\mathbf{0}\in F$ の可算基本近傍系である． □

Step 3. $W=\overline{\varphi(V_1)}^\circ$ とおく．そのとき，$\mathbf{0}\in W\subset\varphi(U)$.

実際，任意に $y \in W$ をとる．$y \in \overline{\varphi(V_1)}^\circ \subset \overline{\varphi(V_1)}$ より，$\mathbf{0}$ の近傍 $\overline{\varphi(V_2)}^\circ$ に対して

$$\left(y + \overline{\varphi(V_2)}^\circ\right) \cap (\varphi(V_1) \setminus \{y\}) \neq \emptyset$$

よって，

$$^\exists y_1 \in \left(y + \overline{\varphi(V_2)}^\circ\right) \cap (\varphi(V_1) \setminus \{y\}).$$

$y_1 \in \varphi(V_1)$ より $y_1 = \varphi(x_1)$ $(^\exists x_1 \in V_1)$．また，$y_1 \in \left(y + \overline{\varphi(V_2)}^\circ\right)$ より，

$$y_1 - y \in \overline{\varphi(V_2)}^\circ \subset \overline{\varphi(V_2)}.$$

一方，V_ν を円板状近傍にとれば，$-\left(\overline{\varphi(V_2)}\right) = \overline{(-\varphi(V_2))} = \overline{(\varphi(-V_2))} = \overline{(\varphi(V_2))}$ ゆえ，

$$\begin{cases} \mathbf{0} \neq y - y_1 \in \overline{\varphi(V_2)}^\circ \subset \overline{\varphi(V_2)} \\ y_1 = \varphi(x_1) \ \ (x_1 \in V_1) \end{cases}$$

次に，$\overline{\varphi(V_3)}^\circ$ に対して，

$$^\exists y_2 \in \left(y - y_1 + \overline{\varphi(V_3)}^\circ\right) \cap (\varphi(V_2) \setminus \{y - y_1\}) \neq \emptyset$$

よって，

$$\begin{cases} \mathbf{0} \neq y - y_1 - y_2 \in \overline{\varphi(V_3)}^\circ \subset \overline{\varphi(V_3)} \\ y_2 = \varphi(x_2) \ \ (x_1 \in V_2) \end{cases}$$

以下，繰り返して

$$y - y_1 - y_2 - \cdots - y_\nu \in \overline{\varphi(V_{\nu+1})}^\circ$$

ただし，$y_i = \varphi(V_i)$ $(x_i \in V_i)$.

$$\sum_{n=\nu}^{\mu} x_n \in V_\nu + V_{\nu+1} + \cdots + V_\mu \subset V_\nu + V_\nu \subset V_{\nu-1}$$

よって，$s_\nu = \displaystyle\sum_{n=1}^{\nu} x_n$ はコーシー列である．

$(\because)$ 任意の $V_{\nu-1}$ に対して，$s_\mu - s_\nu = \displaystyle\sum_{n=\nu}^{\mu} x_n \in V_{\nu-1}$ より分かる．

E の完備性より，点列 $\{s_n\}$ は収束する．

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in E$$

今，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\nu} x_n \in V_1 + \cdots + V_\nu \subset V_1 + V_1 \subset \overline{V_1 + V_1} \subset U$ が全ての ν について言える．よって，$x_0 \in \overline{V_1 + V_1} \subset U$．一方．$\{\overline{\varphi(V_\nu)}^\circ\}_\nu$ は $\mathbf{0}$ の基本近傍系より，

$$y - (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \in \overline{\varphi(V_{n+1})}^\circ \quad \therefore \quad \sum_n y_n = y$$

今，$x_0 \in U$ かつ

$$\varphi(U) \ni \varphi(x_0) = \varphi(\sum_n x_n) = \sum_n \varphi(x_n) = \sum_n y_n = y \Longrightarrow y \in \varphi(U)$$

より，$\mathbf{0} \in W \subset \varphi(U)$ を得る．こうして，$\mathbf{0}$ は $\varphi(U)$ の内点である． □

Step 4. $\varphi : E \longrightarrow F$ は開写像である．

実際，$B \subset E$ を開集合とする．そのとき，$\varphi(B)$ が開集合であることを示せば良い．$y \in \varphi(B)$ をとる．そのとき，$y = \varphi(x)\ \ (x \in B)$ とする．B が開集合より，$\mathbf{0}$ の近傍 $U \subset B$ があって，$(x+U) \subset B$. そのとき，$\varphi(x+U) \subset \varphi(x)+\varphi(U) = y+\varphi(U)$. $\varphi(U)$ は $\mathbf{0}$ を内点に持つので，$\mathbf{0}$ の近傍 $W = W(\mathbf{0})$ が存在して，$W \subset \varphi(U)$. よって，

$$y + W \subset y + \varphi(U) = \varphi(x + U) \subset \varphi(B).$$

$y + W$ は y の近傍ゆえ，y は $\varphi(B)$ の内点である．これは，$\varphi(B)$ が開集合であることを示す． □

5　バナッハ空間

5.1　双対空間のノルム

$E = E_{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間とし，$\|\cdot\|$ を E 上の Norm とする．E^* を E の双対空間とする．即ち，

$$E^* = \{\ell : E \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ \ell \text{ は連続線形汎関数}\}$$

今，$\ell \in E^*$ に対し，

$$\|\ell\| = \sup_{\|x\|=1} |\ell(x)| = \sup_{x\neq \mathbf{0}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|}$$

$\dfrac{|\ell(x)|}{\|x\|} \leqq \|\ell\|$ がすべての $x \neq \mathbf{0}$ かつ $\ell(\mathbf{0}) = 0$ より，

$$|\ell(x)| \leqq \|\ell\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E$$

注意 14. $\|\ell\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\ell(x)|$．今，$x \neq \mathbf{0}$ に対し，$x^* = \dfrac{x}{\|x\|}$ とおくと $\|x^*\| = 1$.

$$\therefore\ |\ell(x^*)| \leqq \|\ell\| \Longrightarrow \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} \leqq \|\ell\| \quad \therefore\ \sup_{x\neq\mathbf{0}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} \leqq \|\ell\|$$

逆に，

$$\sup_{x\neq\mathbf{0}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} \geqq \sup_{\|x\|=1} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |\ell(x)| = \|\ell\|\ .$$

命題 8. $\|\ell\| < +\infty$.

Proof. $\ell : E \longrightarrow \mathbb{C}$ は $x = \mathbf{0}$ で連続より，任意の $\Delta(0;\epsilon) = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < \forall\epsilon\}$ に対して，$B(\mathbf{0};\delta') = \{x \in E\ :\ \|x\| < {}^{\exists}\delta\}$ が存在し，$\ell(B(\mathbf{0};\delta') \subset \Delta(0;\epsilon)$.

$$\therefore\ \|x\| < \delta' \Longrightarrow |\ell(x)| < \epsilon$$

即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta' > 0$ が存在し，$\|x\| < \delta'$ ならば，$|\ell(x)| < \epsilon$ が成り立つ．特に，$\epsilon = 1$ に対し，$\delta > 0$ が存在し，$\|x\| < \delta \Longrightarrow |\ell(x)| < 1$. 今，

$$x^* := \frac{\delta x}{2\|x\|}\ (\forall x \neq \mathbf{0})$$

とおくと，$\|x^*\| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$ より，$|\ell(x^*)| < 1 \quad \therefore\ \dfrac{\delta}{2\|x\|}|\ell(x)| < 1$.

$$\therefore\ |\ell(x)| < \frac{2}{\delta}\|x\| \quad (\forall x \in E)$$

即ち，$\ell : E \longrightarrow \mathbb{C}$ は有界な線形汎関数である．そこで，

$$\inf\{k > 0 \ : \ |\ell(x)| \leqq k\|x\|\} = \sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|}$$

より，$\|\ell\| < \infty$. $\square$

命題 9. E^* は *Banach* 空間である．

Proof. (1) $\ell_1, \ell_2 \in E^*,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Longrightarrow \alpha\ell_1 + \beta\ell_2 \in E^*$

$$\begin{aligned}
(\alpha\ell_1 + \beta\ell_2)(x+y) &= \alpha\ell_1(x+y) + \beta\ell_2(x+y) \\
&= \alpha\ell_1(x) + \alpha\ell_1(y) + \beta\ell_2(x) + \beta\ell_2(y) \\
&= \alpha\ell_1(x) + \beta\ell_2(x) + \alpha\ell_1(y) + \beta\ell_2(y) \\
&= (\alpha\ell_1 + \beta\ell_2)(x) + (\alpha\ell_1 + \beta\ell_2)(y) \\
(\alpha\ell_1 + \beta\ell_2)(sx) &= \alpha\ell_1(sx) + \beta\ell_2(sx) \\
&= s\alpha\ell_1(x) + s\beta\ell_2(x) \\
&= s(\alpha\ell_1 + \beta\ell_2)(x)
\end{aligned}$$

(2) $\alpha\ell_1 + \beta\ell_2 : E \longrightarrow \mathbb{C}$ は $x = \mathbf{0}$ で連続である．

任意の $\epsilon > 0$ に対し，$\delta_i > 0$ が存在し，$\|x\| < \delta_i$ ならば $|\ell_i(x)| < \epsilon_i$ を得る．$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと，$\|x\| < \delta$ ならば，

$$\begin{aligned}
|(\alpha\ell_1 + \beta\ell_2)(x)| &= |\alpha\ell_1(x) + \beta\ell_2)(x)| \\
&\leqq |\alpha\ell_1(x)| + |\beta\ell_2)(x)| \\
&\leqq |\alpha|\epsilon + |\beta|\epsilon = (|\alpha| + \beta|)\epsilon
\end{aligned}$$

こうして，$x = \mathbf{0}$ で連続である．一般に，

$$|(\alpha\ell_1 + \beta\ell_2)(x - x_0)| \leqq \|(\alpha\ell_1 + \beta\ell_2)\| \cdot \|x - x_0\|$$

より，$x = x_0$ でも連続．よって，$\alpha\ell_1 + \beta\ell_2 \in E^*$.

(3) E^* は完備である．

$\{\ell_n\} \subset E^*$ をコーシー列とする．即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある番号 $N = N(\epsilon)$ があって，$m, n > N$ ならば，$\|\ell_n - \ell_m\| < \epsilon$ を満たす．よって，

$$\therefore \sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{|(\ell_n - \ell_m)(x)|}{\|x\|} < \epsilon \Longrightarrow |(\ell_n - \ell_m)(x)| \leqq \epsilon \|x\| \ \ (\forall x \in E)$$

$x \in E$ を固定すれば，$\{\ell_n(x)\} \subset \mathbb{C}$ はコーシー列であり，$\mathbb{C}$ は完備だから，$\{\ell_n(x)\}$ は収束する：

$$\gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \ell_n(x)$$

極限値の一意性より，$\gamma : E \longrightarrow \mathbb{C}$ は汎関数である．

- $\gamma : E \longrightarrow \mathbb{C}$ の線形性：

  $x, y \in E$ をとる．任意の $\epsilon > 0$ に対して，番号 $N = N(x, y) > 0$ があって，$n > N$ なら，

$$\begin{aligned} &|\ell_n(x+y) - \gamma(x+y)| < \frac{1}{3}\epsilon \\ &|\ell_n(x) - \gamma(x)| + \frac{1}{3}\epsilon \\ &|\ell_n(y) - \gamma(y)| < \frac{1}{3}\epsilon \end{aligned}$$

  を満たす．

$$\begin{aligned} |\gamma(x+y) - \gamma(x) - \gamma(y)| &= |\gamma(x+y) - \ell_n(x+y) + \ell_n(x) + \ell_n(y) - \gamma(x) - \gamma(y)| \\ &\leqq |\gamma(x+y) - \ell_n(x+y)| + |\ell_n(x) - \gamma(x)| + |\ell_n(y) - \gamma(y)| \\ &< \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \epsilon \end{aligned}$$

  よって，

$$\gamma(x+y) = \gamma(x) + \gamma(y).$$

  同様の方法で $\gamma(\lambda x) = \lambda \gamma(x)$ も示せる． □

- γ の連続性：

  各 $x \in E$ に対し $\lim_{n \to \infty} \ell_n(x) = \gamma(x)$ から，$\epsilon > 0$ に対し，$N = N(x, \epsilon)$ が存在し，$m > N(x, \epsilon)$ ならば

$$|\ell_m - \gamma(x)| < \epsilon$$

を得る．$m > N(x,\epsilon)$ に対し、

$$
\begin{aligned}
|\ell_n(x) - \gamma(x)| &\leqq |\ell_n(x) - \ell_m(x)| + |\ell_m(x) - \gamma(x)| \\
&\leqq \|\ell_n - \ell_m\| \cdot \|x\| + |\ell_m(x) - \gamma(x)| \\
&\leqq \epsilon\|x\| + |\ell_m(x) - \gamma(x)| \\
&\leqq 2\epsilon
\end{aligned}
$$

よって、

$$\|\ell_n - \gamma\| = \sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{|\ell_n(x) - \gamma(x)|}{\|x\|} < 2\epsilon$$

こうして、$\|\gamma\| \leqq \|\ell_n\| + 2\epsilon$．今，$\ell_n$ は連続なので有界である．よって，γ もまた有界，従って連続である．．とくに，

$$\lim_{n\to\infty} \ell_n = \gamma \in E^*$$

以上で，E^* の完備性が示された．故に，E^* は Banach 空間である．

$\square$

6 Hahn-Banachの定理

E を $\mathbb{R}$ 上の位相ベクトル空間とする．

定義 21. $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ が *sublinear function* であるとは，$x, y \in E,\ \mathbb{R} \ni \lambda > 0$ に対し，

$$\begin{cases} p(x+y) \leqq p(x) + p(y) \\ p(\lambda x) = \lambda p(x) \end{cases}$$

を満たすとき．

定理 6 (Hahn-Banachの拡張定理)**.** $E_0 \subset E$ を線形部分空間とする．$f : E_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$-線形関数で $f(x) \leqq p(x)\ \ (\forall x \in E_0)$ を満たすとする．そのとき，E 上の $\mathbb{R}$-線形関数 $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$（$F$ を f の E への拡張という）が存在して

(i) $F|_{E_0} = f$，即ち，$F(x) = f(x)\ \ (\forall x \in E_0)$.

(ii) $F(x) \leqq p(x)\ \ (\forall x \in E)$.

定義 22. g が f の *p-extension* とは，E_0 を含む線形部分空間 $^{\exists}D_g$ （$E \supset D_g \supset E_0$）が存在し，

- $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$-線形写像
- $g|_{E_0} = f\ \ \&\ \ g(x) \leqq p(x)\ \ (x \in D_g)$.

を満たすときをいう．

今，$\mathcal{M} = \{g\ :\ g$ は $f : E_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ の p-extension$\}$ とおく．そのとき，$f \in \mathcal{M}$ より，$\mathcal{M} \neq \emptyset$. 次に，$g, h \in \mathcal{M}$ に対し，

$$g \leqq h \Longleftrightarrow D_g \subset D_h\ \&\ h(x) = g(x)\ \ (\forall x \in D_g)$$

と定義すれば，$\mathcal{M}$ は半順序集合である．そこで，任意の全順序集合 $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ に対し，

$$D_0 := \bigcup_{g \in \mathcal{K}} D_g \subset E$$

とおくと，D_0 は E の線形部分空間である．

$\because\quad x, y \in D_0$ とすると，$x \in^{\exists} D_g$ または $y \in^{\exists} D_h$. $\mathcal{K}$ は全順序集合であるから，$g \leqq h$ または $h \leqq g$ である．$g \leqq h$ ならば，$D_g \subset D_h$ $x, y \in D_h$ かつ D_h が部分空間より，$x + y \in D_h \subset D_0 . h \leqq g$ の場合も同様．更に，$\lambda x \in D_0$ も容易に分かる．

$f_0 : D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ を $x \in D_g$ のとき，$f_0(x) = g(x)$ で定義する．

- f_0 は $\mathbb{R}$-値汎関数として well-defined である．

  実際，$x \in D_0$ ならば $x \in D_g$ なる線形部分空間 D_g が存在する．そのとき，$f_0(x) = g(x)$ と定義した．もし，$x \in D_h$ ならば，$f_0(x) = h(x)$ であるが $\mathcal{K}$ は全順序集合なので，$g \leqq h$ または $h \leqq g . g \leqq h$ ならば，$D_g \subset D_h$ であり，$g(x) = h(x)$ である．$h \leqq g$ ならば $f_0(x) = g(x)$ と定義した．何れにせよ，$x \in D_0$ に対し，唯一つの値 $f_0(x) = g(x)$ をもつ．

- $f_0 : D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ は線形写像である．

  実際，$x, y \in D_0$ をとる，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．$x \in D_g$, $y \in D_h$ とする．$g \leqq h$ ならば，$x, y \in D_h$. よって，$\alpha x + \beta y \in D_h$ かつ

  $$f_0(\alpha + \beta y) = h(\alpha x + \beta y) = \alpha h(x) + \beta h(x) = \alpha f_0(x) + \beta f_0(y)$$

  また，$f_0(\lambda x) = \lambda f_0(x)$ も同様．よって，f_0 は線形写像である，

- $f_0(x) \leqq p(x)$.

  実際，$x \in D_0$ ならば，$x \in D_g$. $g(x) \leqq p(x)$ かつ $f_0(x) = g(x)$ なので，$f_0(x) \leqq p(x)$ $(x \in D_0)$. $\therefore\quad f_0 \geqq g$ $(g \in \mathcal{K}$.

  以上で，$\mathcal{K}$ は $\mathcal{M}$ の中に上界をもつ．よって，Zorn の補題より，$\mathcal{M}$ の中に極大元 φ をもつ（即ち，$g \geqq \varphi$ ならば $g = \varphi$)．$E_0 \subset D_\varphi \subset E$ である，

♠ $E = D_\varphi$ である．

実際，$D_\varphi \neq E$ ならば，${}^{\exists}e \in E$ で $e \notin D_\varphi$.

$$< D_\varphi, e >_{\mathbb{R}} = \{x + \lambda e \ : \ x \in D_{|f},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$x, y \in D_\varphi$, $\lambda > 0, \mu > 0$ とする．

$$\begin{array}{rcl} \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) & = & \varphi(\lambda x + \mu y) \\ & \leqq & p(\lambda x + \mu y) \\ & = & p(\lambda y - \lambda\mu e + \mu x + \lambda\mu e) \\ & < & p(\lambda y - \lambda\mu e) + p(\mu x + \lambda\mu e) \\ & < & \lambda p(y - \mu e) + \mu p(x + \lambda x) \end{array}$$

$$\therefore \quad \lambda\left(\varphi(y) - p(y - \mu x)\right) \leqq \mu\left(p(x + \lambda e) - \varphi(x)\right)$$
$$\therefore \quad \frac{\varphi(y) - p(y - \mu x)}{\mu} \leqq \frac{p(x + \lambda x) - \varphi(x)}{\lambda}$$
$$\therefore \quad \sup_{\substack{y \in D_\varphi \\ \mu > 0}} \frac{\varphi(y) - p(y - \mu x)}{\mu} \leqq \inf_{\substack{x \in D_\varphi \\ \lambda > 0}} \frac{p(x + \lambda x) - \varphi(x)}{\lambda}$$

そこで,

$$\sup_{\substack{y \in D_\varphi \\ \mu > 0}} \frac{\varphi(y) - p(y - \mu x)}{\mu} \leqq \alpha \leqq \inf_{\substack{x \in D_\varphi \\ \lambda > 0}} \frac{p(x + \lambda x) - \varphi(x)}{\lambda}$$

なる実数 α を固定する．$\varphi_1(x + \lambda x) := \varphi(x) + \lambda \cdot \alpha$ とおく．

$$\varphi_1 :< D_\varphi, e >_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

は $\mathbb{R}$-線形写像である．実際,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1(x + \lambda e + y + \mu e) & = & \varphi(x + y) + (\lambda + \mu)\alpha \\ & = & \varphi(x) + \lambda\alpha + \varphi(y) + \mu\alpha \\ & = & \varphi_1(x + \lambda e) + \varphi_1(y + \mu e) \end{array}$$

よって，φ_1 は $\mathbb{R}$-線形写像である．

$\lambda > 0$ なら,

$$\varphi_1(x + \lambda e) \leqq \varphi(x) + \lambda\left[\frac{p(x + \lambda e) - \varphi(x)}{\lambda}\right] = p(x + \lambda e)$$

$\mu < 0$ ならば,

$$\varphi_1(y - \mu e) \leqq \varphi(y) - \mu\left[\frac{\varphi(y) - p(y - \mu e)}{\mu}\right] = p(y - \mu e)$$

よって，

$$\varphi_1(x+\lambda e) \leqq p(x+\lambda e) \quad ,\forall(x+\lambda e) \in < D_\varphi, e >_{\mathbb{R}}$$

を得る．一方，$\varphi_1(x) = \varphi(x) \ \ (x \in D_\varphi)$（$\lambda = 0$ とおく.）明らかに $\varphi_1 \geqq \varphi$ である．これは，φ が極大元に反する．こうして，$D_\varphi = E$. この $\varphi = F$ とおけば，これが求めるもの．

命題 10 (複素 Hahn-Banach の拡張定理)**.** $E := E_{\mathbb{C}}$ を複素位相ベクトル空間とし，$E_0 \subset E$ を複素部分空間とする．$f : E_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ を複素線形汎関数とする．実数値数関数 $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ があって，

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \& \quad p(x+y) \leqq p(x) + p(y) \quad (x, y \in E)$$

を満たし，

$$|f(x)| \leqq p(x) \quad (x \in E_0)$$

が成立するとする．そのとき，複素線形汎関数 $F : E \longrightarrow \mathbb{C}$ が存在し，

$$F(x) = f(x) \quad (x \in E_0) \ \ \& \ \ |F(x)| \leqq p(x) \quad (x \in E)$$

Proof. E は $\mathbb{R}$ 上の位相ベクトル空間とみなせる．$f(x) = g(x) + ih(x)$ とおく．$g, h : E_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ は実線形間関数で，$g(x) = \Re f(x) \leqq |f(x)| \leqq p(x) \quad (x \in E_0)$. よって，実 Hahn-Banach の定理から，E 上の線形汎関数 $G : E \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して，$G(x) = g(x) \quad (x \in E_0)$ かつ $G(x) \leqq p(x) \quad (x \in E)$ が成り立つ．$-G(x) = G(-x) \leqq p(-x) = p(x)$ なので，$|G(x)| \leqq p(x) \quad (x \in E)$

注意 15.

$$\begin{aligned} g(ix) + ih(ix) &= f(ix) = if(x) = i(g(x) + ih(x) = ig(x) - h(x) \\ &\Downarrow \\ g(x) &= h(ix) \ \ \& \ \ h(x) = -g(ix) \end{aligned}$$

さて，$F(x) = G(x) - iG(ix)$ とおく．

$$F(x) = g(x) - ig(ix) = g(x) + ih(x) = f(x) \quad (x \in E_0).$$

今，

$$\begin{aligned} F(x+y) &= G(x+y) - iG(i(x+y)) = G(x+y) - iG(ix+iy) \\ &= G(x) + G(y) - i(G(ix) + G(iy)) = F(x) + F(y). \end{aligned}$$

更に,

$$F(ix) = G(ix) - iG(-x) = i(-iG(ix) + G(x)) = iF(x) \quad \& \quad F(ax) = aF(x) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

より, $\lambda = a + bi \ \ (a, b \in \mathbb{R})$ に対し,

$$\begin{aligned} F(\lambda x) &= F((a+bi)x) = F(ax) + F(bix) = aF(x) + bF(ix) = aF(x) + biF(x) = (a+bi)F(x) \\ &= \lambda F(x). \end{aligned}$$

$F(x) = |F(x)|e^{i\theta}$ とおくと,

$$\mathbb{R} \ni |F(x)| = e^{-i\theta}F(x) = F(e^{-i\theta}x) = G(e^{-i\theta}x)$$

より,

$$\begin{aligned} |F(x)| &= |e^{-i\theta}F(x)| = |F(e^{-i\theta}x)| = |G(e^{-i\theta}x)| \\ &\leqq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}x)|p(x) \leqq p(x) \end{aligned}$$

この $F(x)$ が求める $f(x)$ の拡張である. □

注意 16. $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ とおく. $^{\exists}F : E \longrightarrow \mathbb{C}$ があって, $F(x) = f(x) \ \ (x \in E_0)$. かつ $|F(x)| \leqq p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$. よって, $\|F\| \leqq \|f\|$ を得る. 一方,

$$\|F\| = \sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{F(x)}{\|x\|} \geqq \sup_{E_0 \ni x \neq \mathbf{0}} \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{f(x)}{\|x\|} = \|f\|.$$

故に, $\|F\| = \|f\|$ を得る.

命題 11. E を *Banach* 空間とし, $\mathbf{0} \in A \subset E$ を *closed convex subset*(閉凸部分集合) とする. そのとき, $x_0 \in E,\ x_0 \notin A$ ならば, E 上の 連続な $\mathbb{R}$-線形関数 $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ で

$$f(x) \leqq 1 \quad (\ \forall x \in A\ ) \quad \& \quad f(x_0) > 1$$

を満たすものが存在する.

Proof.

$$B = \{x \in E \ :\ \|x\| < \delta\}, \quad U = A + B = \{a + b \ :\ a \in A,\ b \in B\}$$

とおく.

- U は開集合である．

  実際，$U = \bigcup_{a\in A}(a+B)$ であり，$a+B \cong B$ は開集合なので U もまた開集合である．

- U は凸集合である． $\square$

  実際，$a_1+b_1,\ a_2+b_2 \in U\ \ (a_i \in A,\ b_i \in B)$ および $0 \leqq t \leqq 1$ に対し，A も B も凸集合なので，

  $$t(a_1+b_1)+(1-t)(a_2+b_2) = ta_1+(1-t)a_2+tb_1+(1-t)b_2 \in A+B = U$$

  $\square$

- δ を十分小さくとれば，$x_0 \notin \overline{U}$ とできる．

  実際，A も $\{x_0\}$ も閉集合で $x_0 \notin A$ であり，また，E は Hausdorff だから

  $$\delta(x_0, A) = \inf_{a\in A}\|x_0 - a\| > 0$$

  $\delta < \dfrac{1}{3}\delta(x_0, A),$ 即ち，$\delta(x_0, A) > 3\delta$ とする．　　$x_0 \in \overline{U}$ ならば，

  $$(B(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}) \cap U \neq \emptyset$$

  よって，$x_1 \in U \cap B(x_0,\delta)$ で $0 < \|x_1 - x_0\| < \delta$ を満たす点が存在する．$x_1 = a + b\ \ (a \in A, \in B)$ と表す．

  $$\delta > \|x_1 - x_0\| = \|a+b-x_0\| \geqq \|x_0 - a\| - \|b\| \geqq \delta(x_0, A) - \delta$$

  よって，$2\delta > \delta(x_0, A) > 3\delta$ となり，矛盾を生じる． $\square$

次に E 上の関数 $p(x)$ を

$$p(x) = \inf\{\lambda\ :\ \lambda > 0,\ \ \lambda^{-1}x \in U\}$$

にて定義する．この定義は意味がある．実際，

$$E = \bigcup_{\lambda>0}\lambda B \subset \bigcup_{\lambda>0}\lambda U$$

より，任意の $x \in E$ に対し，${}^{\exists}\lambda > 0$ があって，$x \in \lambda U \quad \therefore \quad \lambda^{-1}x \in U$ である．

- $p(x) \geqq 0$ かつ $p(x_0) > 1$. 特に，$p(\mathbf{0}) = 0$ と約束する．

  実際，$p(x_0) > 1$ を示そう．$\lambda^{-1}x_0 \in U$ なる λ は常に $\lambda \leqq 1$ と仮定する，$x_0 \in \lambda U$ より，$x_0 = \lambda(a+b) \quad (a \in A, \quad b \in B)$.$\mathbf{0} \in A$ は凸集合ゆえ，$\lambda a + (1-\lambda)\mathbf{0} = \lambda a \in A$. 一方，$\|\lambda b\| = \lambda\|b\| < \delta$ より，$\quad \lambda b \in B \quad \therefore$ $x_0 = \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b \in A + B = U$. これは $x_0 \notin \overline{U}$ に矛盾する．故に，$p(x_0) > 1$. □

- $p(x)$ は sublinear である．

  実際, $x, y \in E$ とする．そのとき, $\lambda > 0, \mu > 0$ が存在して, $x \in \lambda U,\ y \in \mu U$. これを満たす任意の λ, μ について考える．$x' = \lambda^{-1}x \in U,\ y' = \mu^{-1}y \in U$ とおく．

  $$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} > 0\ ,\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} > 0\ ,\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} = 1$$

  かつ U は凸集合ゆえ,

  $$\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}x' + \frac{\mu}{\lambda+\mu}y' \in U\ .$$

  両辺の inf をそれぞれ取って.

  $$p(x+y) \leqq \lambda + \mu \Longrightarrow p(x+y) \leqq p(x) + \mu \Longrightarrow p(x+y) \leqq p(x) + p(y)\ .$$

  次に，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対し,

  $$\frac{1}{\alpha} \cdot p(\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \cdot \inf_{\lambda>0}\{\lambda\ :\ \lambda(\alpha x) = \alpha \cdot \lambda x \in U\} = \inf_{\lambda>0}\{\lambda\ :\ \lambda x \in U\} = p(x)\ .$$

  よって，$p(\alpha x) = \alpha p(x)$. 以上で，$p(x)$ は sublinear function である． □

そこで，$L = < x_0 >_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}x_0 = \{\lambda x\ :\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ とおく．$L \cong \mathbb{R}$ は E の実 1 次元部分空間である．命題 7 より，L は閉部分空間である．今，線形写像 $f : L \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x_0) = p(x_0)\ (> 1)$ を満たすように定義する．そのとき, $f(\lambda x_0) = p(\lambda x_0)\ \ (\lambda \geqq 0)$. 一方，$\mu > 0$ に対し,

$$f(-\mu x_0) = -\mu p(x_0) < 0 \leqq p(-\mu x_0)$$

こうして，L 上 $f \leqq p$ を得る．Hahn-Banach の定理から，L 上の線形汎関数は E 上の線形汎関数 $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ に拡張できる．$F = f$ と同じ記号を用いれば, $f(x) \leqq p(x)\ \ (\forall x \in E)$ を満たす．今，$p(x) \leqq 1\ \ (x \in U)$ である，実際，$x \in U \ni \mathbf{0}$

ならば，U は凸集合だから，$\mathbf{0}$ と x を結ぶ半直線 $tx \ \ (0 \leqq t \leqq 1)$ は U に含まれる．一方，U は開集合より x 中心半径 ϵ の開球 $B(x.\epsilon)$ は U に含まれる．$\|sx\| < \epsilon$ となる $s > 0$ を選ぶ．そこで，$z = (1+s)x \in U$ とおくと $\|z - x\| = s\|x\| < \epsilon$ より，$z = (1+s)x \in B(x,\epsilon) \subset U$. $\lambda = \frac{1}{1+s} < 1$ とおく．そのとき $p(x) \leqq \lambda < 1$. よって，$p(x) \leqq 1 \ \ (x \in U)$. よって，$f(x) \leqq p(x) \leqq 1$ より，$f(x) \leqq 1 \ \ (x \in U)$. $B \subset U$ より，$f \leqq 1 \ \ (x \in \overline{B})$ を得る．$B_1 = \{x \in E \ : \ \|x\| \leqq 1\}$ とおくとき，$x \in B_1$ ならば $\delta x \in B$ ゆえ，f の線形性から，$f(\delta x) \leqq 1 \quad \therefore \ \ f(x) \leqq \delta . x \in B$ なら $-x \in B$ より，$f(-x) = -f(x) < 1 \quad \therefore \ \ |f| \leqq \delta \ \ (x \in B)$.

こうして，

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} |f(x)| = \sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} < \infty \Longrightarrow |f(x)| \leqq \|f\|\|x\|$$

より，f は $x = 0$ で連続，従って E で連続である．一方，$A \subset U$ より，$f(x) \leqq 1 \ \ (x \in A)$ が得られた． □

命題 12. E を $\mathbb{C}$ 上の *Banach* 空間とし $\mathbf{0} \in A \subset E$ を閉凸集合とする．さらに，A は *circled*（$x \in A \ \ \lambda \in \mathbb{C} \ |\lambda| = 1$ に対し，$\lambda x \in A$ を満たす）とし，$x_0 \in E$, $x_0 \notin A$ とする．そのとき，$f \in E^*$ が存在して

$$|f(x)| \leqq 1 \ \ (\forall x \in A); \ \& \ \ |f(x_0)| > 1$$

を満たす.

Proof. E を $\mathbb{R}$ 上の Banach 空間と見なして，Hahn-Banach の定理を適用すれば，連続線形汎関数 $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在し，

$$\phi(x) \leqq 1 \ \ (\forall x \in A) \ \ \& \ \ \phi(x_0) > 1$$

を満たす.

$$f(x) = \phi(x) - i\phi(ix) \ \ (x \in E)$$

とおくと $\phi(x)$ の連続性から $f(x)$ も連続.

- $f(x)$ は $\mathbb{C}$-線形写像.

  実際,

$$f(x+y) = \phi(x+y) - i\phi(i(x+y)) = \phi(x) + \phi(y) - i\phi(ix+iy)$$

また，$x, y \in E$ なら $ix, iy \in E$ より，$\phi(ix), \phi(iy) \in \mathbb{R}$. よって，$\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ の線形性から $\phi(ix+iy) = \phi(ix) + \phi(iy)$．よって，$f(x+y) = f(x) + f(y)$ を得る．一方,$\lambda = a + bi \ \ (a, b \in \mathbb{R})$ に対し，$ax \in E, bix \in E$ ゆえ,

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= f(ax + bix) = f(ax) + f(bix) \\ &= af(x) + bf(ix) \\ f(ix) &= \phi(ix) - i\phi(i^2 x) = \phi(ix) - i\phi(-x) \\ &= \phi(ix) + i\phi(x) = i\left(\phi(x) - i\phi(ix)\right) \\ &= if(x) \\ f(\lambda x) &= af(x) + bif(x) = (a+bi)f(x) \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

□

- $\Re f(x) = \phi(x)$，ここに，$\Re f(x)$ は $f(x)$ の実部を表す．

  実際，$f(x) = \phi(x) - i\phi(ix)$ かつ $\phi(x), i\phi(x) \in \mathbb{R}$ より，

  $$2\Re f(x) = f(x) + \overline{f(x)} = \phi(x) - i\phi(ix) + \phi(x) + i\phi(ix) = 2\phi(x)$$

  を得る． □

- $x \in A$ を任意にとり固定する．そのとき，$f(x) = |f(x)|e^{-i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R})$ と極形式表示する．A は circled より，$e^{i\theta}x \in A$．また，$f(x)$ の線形性および $\phi(x) \leqq 1 \ \ (\forall x \in A)$ から

  $$|f(x)| = f(x)e^{i\theta} = f(e^{i\theta}x) = \Re f(e^{i\theta}x) = \phi(e^{i\theta}x) \leqq 1$$

  を得る．一方,

  $$|f(x_0)| = |\phi(x_0) - i\phi(ix_0)| = \sqrt{|\phi(x_0)|^2 + |\phi(ix_0)|^2} > \phi(x_0) > 1$$

  より，$|f(x_0)| > 1$ を得る．

以上により，証明は完結する． □

系 3. $E = E_{\mathbb{C}}$ を複素 *Banach* 空間とする．$x_0 \in E$ とする．そのとき，${}^{\exists}\ell \in E^*$ があって,

$$\begin{cases} \ell(x_0) = \|x_0\| \\ |\ell(x)| \leqq \|x\| \ \ (\forall x \in E) \end{cases}$$

特に，$\|\ell\| = 1$ である．

Proof. $p(x) = \|x\|$ とする．$x_0 = 0$ ならば $\ell = 0$ とすれば良い．$x_0 \neq \mathbf{0}$ ならば,

$$M = \mathbb{C}x_0 = \{\lambda x_0 \ : \ \lambda \in \mathbb{C}\} \subset E_{\mathbb{C}}$$

は有限次元より閉部分空間である. そのとき，$f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ を $f(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|$ で定義すれば, f は連続線形写像である．実際，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta < \frac{\epsilon}{\|x_0\|}$ を選ぶ．そのとき，$|\lambda| < \delta$ ならば

$$|f(\lambda x_0)| = \|\lambda x_0\| = |\lambda| \cdot \|x_0\| < \delta \cdot \|x_0\| < \epsilon$$

よって, f は $\mathbf{0}$ で連続．ゆえに M で連続である．特に $f(x_0) = \|x_0\|$. Hahn-Banach の定理より，線形写像 $\ell : E \longrightarrow \mathbb{C}$ で $\ell(x) = f(x)\ \ (x \in M)$ かつ $|\ell(x)| \leqq \|x\|\ \ (x \in E)$ を満たすものが存在する．特に, $|\ell(\lambda x_0)| = |f(\lambda x_0)| = |\lambda|\|x_0\|$. よって，$\ell(x_0) = \|x_0\|$. $\square$

7　共役線形写像について

7.1

E, F を $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間とし，$u : E \longrightarrow F$ を連続な線形写像とする．

定義 23.

$$\|u\| = \sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

を連続線形写像 u のノルムという．

補題 1. $\|u\|$ は有界で

$$\|u(x)\| \leqq \|u\| \cdot \|x\|.$$

が成立．

Proof. u の $x = \mathbf{0}$ での連続性から，$\epsilon = 1$ に対し，$\delta > 0$ が存在し，$\|x\| < \delta$ ならば，$\|u(x)\| < 1$. 任意の $x \in E$ に対し，$x^* = \dfrac{\delta}{2} \dfrac{x}{\|x\|}$ とおく．そのとき，$\|x^*\| < \dfrac{\delta}{2} < \delta$ より，$k = \frac{2}{\delta}$ とおくと，$\|u(x^*)\| < 1$. よって，$\|u(x)\| \leqq \dfrac{2}{\delta}\|x\| = k\|x\|$.

よって，

$$\inf\{k \ : \ \|u(x)\| \leqq k\|x\|\} = \sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} =: \|u\| < \infty$$

を得る．よって，

$$\|u(x)\| \leqq \|u\| \cdot \|x\| \ \ (x \in E)$$

□

次に，E^*, F^* をそれぞれ，E, F の共役空間とする．連続な線形写像 $u : E \longrightarrow F$ の共役写像（adjoint map）を $u^* : F^* \longrightarrow E^*$ を $\lambda \in F^*$, $x \in E$ に対し，

$$u^*(\lambda)(x) := \lambda(u(x)) \ \ (x \in E)$$

で定義する．即ち，合成写像：

$$u^*(\lambda) = \lambda \circ u : E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C} \quad ; x \mapsto \lambda(u(x))$$

として定義する．u も λ も連続だから，その合成写像 $u^*(\lambda)$ も E から $\mathbb{C}$ への連続写像である．即ち、$u^*(\lambda) \in E^*$ を得る．

補題 2. 共役写像 u^* は線形写像である．

Proof. $\lambda_1, \lambda_2 \in F^*$ および任意の $x \in E$ に対して，

$$u^*(\lambda_1 + \lambda_2)(x) = (\lambda_1 + \lambda_2)(u(x)) = \lambda_1(u(x) + \lambda_2(u(x)) = u^*(\lambda_1) + u^*(\lambda_2)$$

と定義することで線形性は示せる． □

命題 13. $u^* : F^* \longrightarrow E^*$ の連続写像である．

Proof. 双対線形写像 $u^* : F^* \longrightarrow E^*$ のノルム $\|u^*\|$ を

$$\|u^*\| = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\|u^*(\lambda)\|}{\|\lambda\|} = \sup_{\|\lambda\|=1} \|u^*(\lambda)\|$$

で定義する．但し，

$$\|u^*(\lambda)\| = \sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{|\lambda(u(x))|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |\lambda(u(x)|$$

まず，次を示そう．

補題 3.

$$\|u^*\| = \|u\|.$$

Proof. $\mathbf{0} \neq u(x) \in F$ に対し，$\lambda(u(x)) = \|u(x)\|$ かつ $\|\lambda\| = 1$ なる $\lambda \in F^*$ が存在する．

$$\sup_{\|x\|=1} |\lambda(u(x)| \geqq \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \|u\|.$$

$$\therefore \quad \|u^*\| \geqq \|u\|.$$

一方，

$$\|u^*(\lambda)\| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda(u(x)| \leqq \sup_{\|x\|=1} \|\lambda\| \cdot \|u(x)\| \leqq \|\lambda\| \sup_{\|x\|=1} \|u\| \cdot \|x\| = \|\lambda\| \cdot \|u\|.$$

$$\therefore \quad \|u^*(\lambda)\| \leqq \|\lambda\| \cdot \|u\|.$$

こうして，

$$\|u^*\| = \sup_{\|\lambda\|=1} \|u^*(\lambda)\| \leqq \sup_{\|\lambda\|=1} \|\lambda\| \cdot \|u\| = \|u\|$$

を得る．故に

$$\|u^*\| = \|u\|$$

を得る． □

注意 17. この補題により，$u : E \longrightarrow F$ は有界 $\iff$ $u^* : F^* \longrightarrow E^*$ は有界．結果的に u は連続 $\iff u^*$ は連続.

$\square$

これまでの議論の中で,$u : E \longrightarrow F$ を複素 Banach 空間 E から F への連続線形写像とし，$u^* : F^* \longrightarrow E^*$ を共役写像とすると，注意 10. によって，u^* は連続線形写像であることは示した.

補題 4. $u : E \longrightarrow F$ が全射ならば，共役写像 $u^* : F^* \longrightarrow E^*$ は単射である.

Proof. $u^*(\lambda) = 0$ $(\lambda \in F^*)$ とする，u が全射より，任意の $y \in F$ に対し，$u(x) = y$ をみたす $x \in E$ が存在する.

$$0 = u^*(\lambda)(x) = \lambda(u(x)) = \lambda(y).$$

よって，$\lambda = 0.u^*$ は線形写像なので，u^* は単射である.

次に，$x \in E$ に対し $\widehat{x} \in E$ は $\widehat{x} : E^* \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\widehat{x}(\lambda) = \lambda(x)$ で定義すすれば，自然な写像

$$\tau : E \longrightarrow E^{**} ; x \mapsto \widehat{x}$$

が定義される．そのとき,

命題 14. 写像 $\tau : E \hookrightarrow E^{**}$ は単射線形写像である.

Proof. $|\lambda(x)| \leqq \|\lambda\| \cdot \|x\|$

$$\|\widehat{x}\| = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|\lambda(x)|}{\|\lambda\|} \leqq \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\|\lambda\| \|x\|}{\|\lambda\|} = \|x\|$$

逆に，Hahn-Banach の定理より，$\lambda(x) = \|x\|$ かつ $\|\lambda\| = 1$ なる $\lambda \in E^*$ が存在する．ゆえに,

$$\|\widehat{x}\| \geqq \frac{\lambda(x)}{\|\lambda\|} = \|x\|$$

を得る.

$$\therefore \quad \|\widehat{x}\| = \|x\|.$$

次に,

$$\widehat{x-y}(\lambda) = \lambda(x-y) = \lambda(x) - \lambda(y) = \widehat{x}(\lambda) - \widehat{y}(\lambda)$$

なので,

$$\widehat{x-y} = \widehat{x} - \widehat{y}$$

を得る．一方．

$$\|x-y\| = \|\widehat{x-y}\| = \|\widehat{x}-\widehat{y}\|.$$

であるので，

$$x = y \Longleftrightarrow \widehat{x} = \widehat{y}$$

が成立し，結果，$\tau : E \longrightarrow E^{**}$ が単射性が示される． □

□

7.2 Banach 空間の商空間

Banach 空間 E の閉部分空間 N による商空間 E/N は Banach 空間であることを示そう．まず，E/N を E の N による商空間（商位相を入れる）とし，$\pi : E \longrightarrow E/N \ : \ \pi(x) = [x]$ を商写像とする．そのとき，π は線形写像であることは，$[x+y] = [x]+[y]$, $\lambda[x] = [\lambda x]$ と定義すれば容易に確かめられる．換言すれば，E/N には π を線形写像にするようなベクトル空間としての構造を入れた．

注意 18. 商位相とは $\pi : E \longrightarrow E/N$ を連続にする最強の位相である．集合 $\Omega \subset E/N$ は $\pi^{-1}(\Omega) \subset E$ が開集合の時，開集合である．．特に，π は開写像である．実際，開集合 $U \subset E$ に対し，

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{x\in N}(x+U)$$

かつ $(x+U \cong U$ は開集合ゆえ，その和集合として $\pi^{-1}(\pi(U))$ は開集合である．商位相の定義から，$\pi(U)$ は開集合である．こうして，π は開写像である．また，$\pi^{-1}(E/N \setminus [x]) = E \setminus (x+N)$ は $x+N$ は N が閉集合ゆえ，開集合である．こうして，商位相の定義から $E/N \setminus [x]$ は開集合．よって，一点 $[x]$ は閉集合である．

$$[x]+[y] = [x+y], \quad [\lambda x] = \lambda[x] \ \ x, y \in E, \ \ \lambda \in \mathbb{C}$$

と定義すると，E/N は $\mathbb{C}$ 上の位相ベクトル空間である．距離空間は *Hausdorff* 空間なので，E/N は *Hausdorff* 空間である．

注意 19. E/N は *Banach* 空間である．$[x] \in E/N$ に対し，そのノルムを

$$\|[x]\| := \inf_{y\in N}\|x-y\|$$

で定義する．

まず，<u>E/N 上のノルムである</u>ことを示す：

(i) $\|[x]\| = 0$ で $[x] \neq \mathbf{0}$ とする．$x \notin N$ である．E は *Hausdorff* で N は閉集合ゆえ，$\inf_{y \in N} \|x - y\| > 0$．これは，$\|[x]\| = 0$ に反する．

$$\therefore \quad x \in N \qquad \therefore \quad [x] = 0.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \|[x] + [y]\| &= \|[x + y]\| = \inf_{z \in N} \|x + y - z\| = \inf_{z \in N} \|x - z + y - z + z\| \\ &\leqq \inf_{z \in N} (\|x - z\| + \|y - z\| + \|z\|) \\ &\leqq \inf_{z \in N} \|x - z\| + \inf_{z \in N} \|y - z\| + \inf_{z \in N} \|z\| \\ &= \inf_{z \in N} \|x - z\| + \inf_{z \in N} \|y - z\| \\ &= \|[x]\| + \|[y]\| \end{aligned}$$

(iii) $N = \dfrac{N}{\lambda}$ (if $\lambda \neq 0$) より

$$\|\lambda[x]\| = \|[\lambda x]\| = \inf_{z \in N} \|\lambda x - z\| = |\lambda| \inf_{z \in N} \|z - \frac{z}{\lambda}\| = |\lambda| \inf_{w \in N} \|x - w\|$$

次に，$\underline{E/N \text{ の完備性}}$について示す．

実際，$\{\xi_n\}$ を E/N のコーシー列とする，即ち，

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ {}^{\exists} N > 0 \quad \text{s.t.} \quad \|\xi_n - \xi_m\| < \epsilon \ \text{ for } \quad m, n \geqq N$$

各 ξ_n に対し, ${}^{\exists} x_n \in E$ が存在し, $\xi_n = [x_n]$ と表される．$\epsilon = \dfrac{1}{2^{k+2}}$ に対し, ${}^{\exists} N(k) > 0$ が存在し，数列 $\{n_k\}_{k=1}$ ($n_k > N(k)$) に対し，

$$\|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}\| = \| \left[x_{n_{k+1}}\right] - [x_{n_k}] \| = \| \left[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right] \| < \frac{1}{2^{k+2}}$$

が成立する．一方，商ノルムの定義

$$\| \left[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right] \| = \inf_{z \in N} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - z\|$$

から（即ち，inf の定義から)，$\epsilon = \dfrac{1}{2^{k+2}}$ に対し，$z_k \in N$ が存在し，

$$\|y_k := x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - z_k\| < \| \left[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right] \| + \frac{1}{2^{k+2}} < \frac{1}{2^{k+1}} \ .$$

$x_{n_1} + y_1 + \cdots + y_k = s_k$ とおくと，

$$\|s_k - s_{k-1}\| = \|y_k\| = \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - z_k\| < \frac{1}{2^{k+1}}$$

よって，$\{s_k\}_k \subset E$ はコーシー列である．E は完備なので，$\lim_{k\to\infty} s_k = {}^{\exists}x \in E$.

$$\begin{aligned} s_k &= x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1} - z_1) + \cdots + (x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - z_k) \\ &= x_{n_k} - (z_1 + \cdots + z_k) \in x_{n_k} + N \end{aligned}$$

より，$[s_k] = [x_{n_k}]$.

$$\|[x_{n_k}] - [x]\| = \inf_{z\in N} \|x_{n_k} - x - z\| = \|s_k - x\| \to 0 \quad \therefore \quad [x_{n_k}] \to [x].$$

$\{\xi_n = [x_n]\}$ はコーシー列より，　n_k , $n >> 0$ に対して，$\|[x_{n_k}] - [x_n]\| \to 0$.

$$\therefore \quad \|[x] - [x_n]\| \leqq \|[x] - [x_{n_k}]\| + \|[x_{n_k}] - [x_n]\| \to 0 \ .$$

よって，$[x_n] \to [x]$. よって，<u>E/N は完備である</u>．故に，E/N は $Banach$ 空間である．

7.2.1 位相空間のコンパクト性（復習）

X を（Hausdorff）位相空間とする $K \subset X$ を部分集合とする．

定義 24. X の開集合の族 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が K の開被覆とは，$K \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ をみたすときをいう（$K = X$ のときも含む）.

定義 25. $K \subset X$ がコンパクト部分集合であるとは，X の<u>任意の開被覆</u> $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ に対し，$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset \Lambda$ が存在して，$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k}$ とできるときをいう．

標語的には，<u>K の任意の開被覆が有限被覆をもつときに K をコンパクトという</u>（$K = X$ のときも含む）.

注意 20. コンパクト位相空間は常に Hausdorff 性をもつと仮定する．

注意 21. $K \subset X$ を部分集合とする．そのとき，K に X からの相対位相を入れることにより，K を位相空間とみなすことができる．このとき，K の開被覆 $\{W_\beta\}$ に対し，X の開集合 U_β があって，$W_\beta = U_\beta \cap K$ と表されるので，

$$\{W_\beta\} = \{U_\beta \cap K \quad : U_\beta \ \text{は}\ X\ \text{の開集合}\,\}$$

よって, K がコンパクトとは, K の開被覆 $\{W_\beta\} = \{U_\beta \cap K \ \ : U_\beta$ は X の開集合$\}$ に対し，$K = \bigcup_b (U_b \cap K)$ ならば，有限被覆 $\{U_{\beta_1} \cap K, \cdots, U_{\beta_n} \cap K\}$ があって，

$$K = \bigcup_{k=1}^n (U_{\beta_k} \cap K)$$

とき.

定義 26. X の集合の族 $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が有限交叉性をもつとは，任意の有限個の部分族 $\{F_{\alpha_1}, \cdots, F_{\alpha_n}\} \subset \mathcal{F}$ に対し，$\bigcap_{k=1}^n F_{\alpha_k} \neq \emptyset$ のときをいう.

命題 15. X がコンパクト

$\Updownarrow$

有限交叉性をもつ X の任意の閉集合族 $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ の合併は空でない：

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \neq \emptyset$$

.

Proof. 有限交叉性をもつ閉集合からなる集合族 $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ で，その合併が空であるものが存在したとする, 即ち，

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha = \emptyset.$$

今，$G_\alpha = X \setminus F_a$ は開集合で $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$. 一方，$X$ はコンパクトであったので，有限被覆をもつ，即ち，$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ が存在して，$X = \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j}$ を得る．これは，$\bigcap_{j\ 1}^n F_{\alpha_j} = \emptyset$. を意味する．このことは $\mathcal{F}$ が有限交叉性をもつことに反する．

逆に，$\mathfrak{U} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を X の開被覆とする．そのとき，$\mathcal{F} = \{F_\alpha = X \setminus G_\alpha\}$ は閉集合の族である．

$$X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha \Longleftrightarrow \emptyset = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (X \setminus G_\alpha) \Longleftrightarrow \bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha = \emptyset$$

$\mathcal{F}$ は有限交叉性を持つなら，仮定から，その合併は空集合ではない．よって，有限交叉性をもたない．故に，$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ があって，

$$\bigcap_{j=1}^n F_{\alpha_j} = \emptyset \Longleftrightarrow X = \bigcup_{j=1}^n (X - \mathcal{F}_{\alpha_j}) = \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j}$$

を得る．これは，$\mathfrak{U}$ が有限被覆をもつことを意味する．よって，X はコンパクトである． □

命題 16. コンパクト位相空間 X 内の閉集合 F はコンパクトである．

Proof. $\{U_\alpha\}_\alpha$ を F の開被覆：$F \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$ とする．$X \setminus F$ は開集合より，$\{X \setminus F, U_\alpha\}_\alpha$ は X の開被覆である．X のコンパクト性から $U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_n}$ があって，

$$X = (X \setminus F) \cup F = (X \setminus F) \cup U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$$

よって，

$$F \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$$

こうして，F はコンパクトである． □

系 4. X をコンパクト空間とする．$F = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ を離散集合とする．そのとき，F は有限集合である．

Proof. F は閉集合である．実際，$x \notin F$ をとると，各 i について，$x \neq x_i$. 一方，Hausdorff 性から，$U(x) \cap U(x_i) = \emptyset$ なる近傍 $U(x), U(x_i)$ が存在する．よって，$U(x) \cap F = \emptyset$，即ち，$U(x) \subset (X \setminus F)$ となり，$X \setminus F$ は閉集合である．こうして，F はコンパクトである．今，$x_i \in F$ に対し，開近傍 $U_i = U(x_i)$ で $U_i \cap (F \setminus \{x_i\}) = \emptyset$，即ち，$U_i \cap F = \{x_i\}$ なるものが存在する. 今，$F \subset \bigcup_i U_i$ であり，F はコンパクトゆえ，F は有限被覆をもつ．このことから，F は有限集合である． □

命題 17 (点列コンパクト（可算コンパクト）性). X がコンパクトなら，その無限部分集合は少なくとも一つの集積点をもつ．

Proof. X の無限部分集合 F が集積点をもたないとすると，$\mathcal{F}$ に属する可算無限部分集合 $F_1 = \{x_n\}_{n \geqq 1}$ は集積点を持たない閉集合である．即ち，F_1 は孤立点からなる閉集合である．X がコンパクトより，F_1 は有限集合である． □

7.2.2 Banach 空間に於けるコンパクト性の復習

Banach 空間 $(E, \| \ \|)$ は完備なノルム空間である，$d = \|x - y\|$ は E は E 上の距離を定め，この距離 d に関して完備である．即ち，任意のコーシー列が収束するときをいう．$\{x_n\} \subset E$ をコーシー列とは，$\lim_{m,n \to \infty} d(x_m, x_n) = 0$ ならば，${}^\exists x \in E$ があって，$\lim_{n \to \infty} x_n = x$ が成立するとき．

定義 27. $K \subset E$ が点列コンパクトであるとは，K の任意の点列は，K 内のある点に収束する部分列をもつときをいう．即ち，$\forall\{x_n\} \subset K$ に対し，部分列 $^{\exists}\{x_{n_j}\}$ が存在し，$\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x < \infty$ かつ $x \in K$ を満たす時.

<u>**レポート**</u> **1.** 完備距離空間 (E, d) の部分集合 $K \subset E$ に対し，次は同値である.

(1) K はコンパクトである.

(2) K は点列コンパクトである.

また，K が相対点列コンパクトとは，K 内の任意の点列が，E（実際には $\overline{K}$）内に収束する部分列を持つときをいう．こうして，次もまた同値である.

(a) K は相対コンパクト（$\overline{K}$ がコンパクト）である.

(b) K は相対点列コンパクトである.

実際は，(2) $\Longrightarrow$ (1)，　$(b) \Longrightarrow (a)$ を示せばよい.

8　有限次元性定理

8.1　基本定理

定義 28. $X,\ Y$ を *Banach* 空間とする．連続線形写像 $\varphi : X \longrightarrow Y$ がコンパクト（作用素）であるとは，$\varphi(B_X)$ が F で相対コンパクト，即ち，閉包 $\overline{\varphi(B_X)}$ が X でコンパクトのとき，ただし，

$$B_X = \{x \in X \ : \ \|x\| \leqq 1\}.$$

定理 7. E, F を *Banach* 空間とし，$u : E \longrightarrow F$ を連続線形写像とする．また，$u^* : F^* \longrightarrow E^*$ を共役写像とする．

(A) $u(E)$ は F の閉集合 $\Longleftrightarrow$ $u^*(F^*)$ は E^* の閉集合.

(B) u がコンパクト作用素ならば，u^* もコンパクト作用素である.

Proof. (A) の証明：
($\Longrightarrow$)

8.1.1

$u(F)$ は F の部分空間であることは容易に確かめられる．$u(E)$ のノルムは F のノルムの $u(E)$ への制限である．仮定より，$u(E)$ は閉集合．よって，$u(E)$ は F の閉部分空間，即ち，Banach 部分空間である.

$$N := \mathrm{Ker} u = \{x \in E \ : \ u(x) = \mathbf{0}\}$$

とおく．N は E の部分空間で，$\mathbf{0} \in F$ が閉集合で u が連続より，N は E の閉部分空間，即ち，<u>N は E の Banach 部分空間</u>である.

8.1.2

N は E の閉部分空間より，商空間 E/N は商ノルムに関して Banach 空間であり，特に，商写像 $\pi : E \longrightarrow E/N$ は全射連続線形写像である．こうして，連続線形写像

$$E \xrightarrow{\pi} E/N \xrightarrow{\varphi} u(E) \overset{i}{\hookrightarrow} F \ : \ u = i \circ \varphi \circ \pi$$

を得る．ここで, $\varphi : E/N \longrightarrow u(E)$ は $\varphi([x]) = u(x)$ と定義すれば, $u(N) = \mathbf{0}$ より, φ は well-defined である．結果, φ は線形同型写像であることが分かる．また, φ の連続性については, u および π が連続開写像であることから従う．更に, φ は連続全射線形写像ゆえ, 開写像定理より, φ は開写像である．こうして, $\varphi : E/N \longrightarrow u(E)$ は位相同型写像であることが分かる．

以上により，$\underline{\varphi \text{ は Banach 空間の同型写像（線形同型かつ位相同型）}}$である．

8.1.3

次の共役写像の列：

$$F^* \overset{i^*}{\twoheadrightarrow} u(E)^* \overset{\varphi^*}{\cong} (E/N)^* \overset{\pi^*}{\hookrightarrow} E^* \ : u^* = \pi^* \circ \varphi^* \circ i^*$$

を得る．

$$N^\perp = \{\lambda \in E^* \ : \ \lambda|_N = 0\}$$

とおくと，π^* の単射性から

$$N^\perp = \pi^*\big((E/N)^*\big) \overset{\text{同一視}}{\cong} (E/N)^*.$$

実際，$x \in N$ および $^\forall\lambda \in (E/N)^*$ に対し，$\pi^*(\lambda)(x) = \lambda(\pi(x)) = \lambda(\mathbf{0}) = 0$. よって，$\pi^*(\lambda) \in N^\perp$.

逆に，$\lambda \in N^\perp$ とする．$\lambda^* : E/N \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\lambda^*([x]) = \lambda(x)$, $([x] = \pi(x))$ で定義すれば．$\lambda(N) = 0$ より，$[x] = [y]$ ならば，$y + N = x + N$ より，

$$\lambda^*([y]) = \lambda^*(y+N) = \lambda^*(x+N) = \lambda(x+N) = \lambda(x) + \lambda(N) = \lambda(x) = \lambda^*([x]).$$

よって，λ^* は well-defined 線形写像である．とくに，

$$\lambda = \lambda^* \circ \pi = \pi^*(\lambda^*) \in \pi^*\left((E/N)^*\right).$$

よって，$N^\perp = \pi^*\big((E/N)^*\big)$. $\square$

8.1.4

$N^\perp$ が閉集合であることを示せば $(\Longrightarrow)$ の証明は終わる．

実際，double dual $E \hookrightarrow E^{**}$ において，$x^*(\lambda) = \lambda(x)$ $(\lambda \in E^* \ \ x \in E)$ で定義する．このとき，

$$N^\perp = \bigcap_{x \in N} \{\lambda \in E^* \ : \ x^*(\lambda) \ (= \lambda(x)) \ = 0\} = \bigcap_{x \in N} \mathrm{Ker}(x^* : E^* \to \mathbb{C}\}$$

は閉集合（閉集合の任意の合併は閉集合）である．

$(\Longleftarrow)$

8.1.5

$u^*(F^*)$ は E^* の閉集合とする．

$$u : E \xrightarrow{u_1} \overline{u(E)} \overset{i}{\hookrightarrow} F \quad : u = i \circ u_1$$

とおく．$u_1^* : \overline{u(E)}^* \longrightarrow E^*$ を共役写像とする．

8.1.6

u_1^* は単射である．

実際，$y_1^*, y_2^* \in \overline{u(E)}^*$ かつ $u_1^*(y_1^*) = u_1^*(y_2^*)$ とする．そのとき，任意の $x \in E$, $i = 1, 2$ に対し，$u_i^*(y_1^*)(x) = y_i^*(u_1(x))$ より，

$$y_1^*(u_1(x)) = y_2^*(u_1(x))$$

が成立する．任意の $y \in \overline{u(E)}$ に対して，点列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset u(E)$ があって，$y = \lim_{n\to\infty} y_n$ とできる．ここで，各 $y_n \in u(E)$ に対し，$y_n = u(x_n) = u_1(x_n)$ となる $x_n \in E$ が存在するので，

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_1(x_n) = y$$

今，y_i^* は連続線形汎関数ゆえ，

$$\lim_{n\to\infty} y_1^*(u_1(x_n)) = \lim_{n\to\infty} y_2^*(u_1(x_n)) \quad \therefore \quad y_1^*(y) = y_2^*(y)$$

がすべての $y \in \overline{u(E)}$ に対して成立．よって，$y_1^* = y_2^*$. 故に，u_1^* は単射である． □

8.1.7

$u_1^*(\overline{u(E)}^*)$ は E^* の閉集合である．

このことは，$u_1^*(\overline{u(E)}^*) = u^*(F^*)$ を示せば，仮定から，$u^*(F^*)$ は閉集合であるので，示される．実際，$\overline{u(E)} \subset F$ は閉部分空間であるので，Hahn-Banach の定理より，$\overline{u(E)}$ 上の線形汎関数 $\lambda \in (\overline{u(E)})^*$ は F 上の線形汎関数 $\overline{\lambda} \in F^*$ に拡張できる：$\lambda = i^*(\overline{\lambda})$. よって，全射線形写像 $u^* : F^* \overset{i^*}{\twoheadrightarrow} \overline{u(E)}^*$ を得る．即ち，

$$u^* : F^* \overset{i^*}{\twoheadrightarrow} \overline{u(E)}^* \xrightarrow{u_1^*} E^* \quad : u^* = u_1^* \circ i^*$$

を得る．このことから，$u_1^*(\overline{u(E)}^*) = u^*(F^*)$.

□

$\overline{u(E)}^*$ はベクトル空間である．よって，$u_1^*(\overline{u(E)}^*)$ もまたベクトル空間.
実際，$x^*, y^* \in \overline{u(E)}^*$ とすると，${}^{\exists}\{x_n^*\}$, ${}^{\exists}\{y_n^*\} \subset u(E)^*$ が存在し，

$$\lim_{n\to\infty} x_n^* = x^* \ , \ \lim_{n\to\infty} y_n^* = y^* .$$

を得る．各 n について，$x_n^* + y_n^* \in u(E)^*$ ゆえ，

$$x + y = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) \in \overline{u(E)}^*$$

$$\lambda x^* = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (\lambda x_n) \in \overline{u(E)}^* .$$

8.1.8

任意に $y^* \in \overline{u(E)}^*$ をとる．u_1^* の単射性から

$$u_1^* : \overline{u(E)}^* \overset{\sim}{\to} u_1^*(\overline{u(E)}^*) \ , \ (u_1^*)^{-1} : u_1^*(\overline{u(E)}^*) \overset{\sim}{\to} \overline{u(E)}^*$$

を得る．このとき，$x^* := u_1^*(y^*) \in u_1^*(\overline{u(E)}^*)$ より，

$$\|(u_1^*)^{-1} x^*\| \leqq c' \|x^*\|$$

$$\therefore \ \|y^*\| \leqq c' \|u_1^*(y^*)\| \Longrightarrow \|u_1^*(y^*)\| \geqq c\|y^*\| \quad (\text{但し，} c' := \frac{1}{c}).$$

8.1.9

$u(E)$ が $\mathbf{0} \in \overline{u(E)}$ の $\overline{u(E)}$ に於ける近傍を含むなら，$\overline{u(E)} \subset u(E)$ である．即ち，

$${}^{\exists}\delta > 0 \text{ st } B(\delta) = \{y \in \overline{u(E)} \ : \ \|y\| < \delta\} \subset u(E) \Longrightarrow \overline{u(E)} \subset u(E)$$

.

($\because$) $\forall y_0 \in \overline{u(E)}$ をとる．

$$B(y_0, \delta) := \{y \in \overline{u(E)} \ : \ \|y - y_0\| < \delta\} \cap u(E) \neq \emptyset.$$

よって，${}^{\exists}x_0 \in E$ があって，$\|u(x_0) - y_0\| < \delta$.

$\{y \in \overline{u(E)} \ : \ \|y - y_0\| < \delta\} = \{y \in \overline{u(E)} \ : \ \|y\| < \delta\} + y_0$ より，

$$u(x_0) - y_0 \in B(y_0, \delta) - \{y_0\} = B(\delta) \subset u(E)$$

$\therefore$ ${}^{\exists}x_1 \in E$ —rm st $u(x_0) - y_0 = u(x_1)$.

$$\therefore \ y_0 = u(x_0) - u(x_1) = u(x_0 - x_1) \in u(E).$$

$\therefore$ $\overline{u(E)} \subset u(E)$. 特に，$u_1 : E \longrightarrow \overline{u(E)}$ は全射である． $\square$

8.1.10

$u(E)$ が $\mathbf{0} \in \overline{u(E)}$ の $\overline{u(E)}$ に於ける近傍を含むことを示そう：

(1) $B_E = \{x \in E \ : \ \|x\| \leqq 1\}$ とおく．このとき，8.18 の c に対し，

$$\overline{u(E)} \supset S := \overline{u_1(B_E)} \supset \overline{B(c)} = \{y \in \overline{u(E)} \ : \ \|y\| \leqq c\}.$$

$(\because)$ $S \not\supset \overline{B(c)}$ とする，即ち，$^\exists y \in \overline{B(c)}$, $y \notin S$ とする．$\mathbf{0} \in S$ かつ S は閉凸集合より, Hahn-Banach の定理 (命題 12) より, $y^* \in \overline{u(E)}^*$ が存在して, $|y^*(s)| \leqq 1$ $(s \in S)$ かつ $|y^*(y)| > 1$. よって, $|y^*(u(x))| \leqq 1$ $(x \in B_E)$, 即ち, $|u_1^*(y^*)(x)| \leqq 1$ $(\|x\| \leqq 1)$. よって，$\|u_1^*(y^*)\| \leqq 1$. (8.18) より，

$$\|y^*\| \leqq \frac{\|u_1^*(y^*)\|}{c} \leqq \frac{1}{c}$$

よって，

$$|y^*(y)| \leqq \|y^*\| \cdot \|y\| \leqq \frac{\|y\|}{c} \leqq 1 \ \ (\because y \in \overline{B(c)})$$

これは，$|y^*(y)| > 1$ に矛盾する．よって，$S \supset \overline{B(c)}$. □

(2) $u(2B_E) \supset B(c)$ である．

$\overline{u_1(B_E)} \supset \overline{B(c)} = \{y \in Y \ : \ \|y\| \leqq c\}$ を示した．

- $\alpha > 0$ に対して，$\overline{u_1(\alpha B_E)} \supset \overline{B(\alpha c)}$ を示そう．

$(\because)$ $\forall z \in \overline{B(\alpha c)}$ ならば，$y = \dfrac{z}{\alpha} \in \overline{B(c)}$. $z = \alpha y \in \alpha\,\overline{B(c)} \subset \alpha\,\overline{u_1(B_E)}$ より，

$$^\exists y_n \in \quad u_1(B_E) \quad \text{s.t.} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha y_n = z$$

今，$^\exists x_n \in u_1(B_E) \quad \text{s.t.} \quad y_n = u_1(x_n)$.

$$\therefore \quad z = \lim_{n\to\infty} \alpha y_n = \lim_{n\to\infty} \alpha u_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} u_1(\alpha x_n) \in \overline{u_1(\alpha B_E)}$$

こうして，$\overline{u_1(\alpha B_E)} \supset \overline{B(\alpha c)}$.

- $u_1(E) \supset u_1(2B_E) \supset \overline{B(c)}$ を示そう．

$(\because)$ $\forall y \in \overline{B(c)}$ ならば，$y \in \overline{u_1(B_E)}$ （8.1.10 − (1)）. よって，

$$^\exists x_1 \in B_E \quad \|y - u_1(x_1)\| < \frac{1}{2}c$$

$y_1 := y - u_1(x_1) \in \overline{B(\frac{c}{2})} \subset \overline{u_1(\frac{c}{2}B_E)}$ とおくと，$\|y_1\| < \frac{1}{2}c$.

$$\underline{^\exists x_2 \in \frac{1}{2}B_E} \quad \text{s.t.} \quad \|y_1 - u_1(x_2)\| < \frac{1}{4}c$$

$\underline{y_2} = y_1 - u_1(x_2) = y - u_1(x_1) - u_1(x_2) = \underline{y - u_1(x_1 + x_2)}$ とおくと，$\|y_2\| < \frac{1}{4}c$. 以下，この操作を繰り返し，

$$^{\exists}x_n \in \frac{1}{2^n}B_E \quad \text{s.t.} \quad y_n = y - u_1(x_1 + \cdots + x_n) \quad \text{とおくと} \quad \|y_n\| < \frac{1}{2^n}c$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \Longleftrightarrow y = \lim_{n\to\infty} u_1(x_1 + \cdots + x_n) = u_1(x) \in u_1(2B_E)$$

故に，$y \in u_1(2B_E)$，故に，$u_1(E) \supset u_1(2B_E) \supset \overline{B(c)}$. こうして，$u_1(E)$ は $\mathbf{0}$ の近傍 $B(c)$ を含む.

注意 22. $u_1(x) \in u_1(2B_E)$ であることの証明：

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \leqq \|x_1\| + \cdots + \|x_n\| < \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2$$

より，$\{x_1 + \cdots + x_n\}$ は収束し，極限値 $x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ は $\|x\| < 2$ を満たす. よって，$u_1(x) \in u_1(2B_E)$.

<u>(B) の証明</u>：

(1) $u : E \longrightarrow F$ をコンパクトとする．$B_E = \{x \in E \ : \ \|x\| \leqq 1\}$ とし $K = \overline{u(B_E)}$ とおく．K はコンパクトである．$B^* = \{y^* \ : \ \|y^*\| \leqq 1\}$ とおく. そのとき，$u^*(B^*)$ が E^* で相対コンパクトを示す．B^* は K 上の連続関数の族：

$$\mathcal{F} := \{y^*|_K \ : \ y^* \in B^*\}$$

を定義する．$y^* \in B^*$ に対し，

$$\begin{aligned} |y^*(k)| \leqq \|y^*\| \cdot \|k\| &\leqq \|k\| \leqq \|u\| \cdot \|x\| \leqq \|u\| \\ \|y^*(k_1) - y^*(k_2)\| &\leqq \|k_1 - k_2\| \quad (k_1, k_2 \in K) \end{aligned}$$

$\{y_n^*\}$ を B^* の点列とする．$\{y_n^*|_K\} \subset \mathcal{F}$ は一様有界かつ同程度連続より，Ascoli-Arzela の定理より，K 上で一様収束する部分列 $\{\eta_\nu := y_\nu^*|_K\} \subset \{y_n^*\}$ が取れる．

(2) $u^*(y_\nu^*)$ は E^* で収束する．

$(\because)$　$\|x\| \leqq 1$ なる x に対して $u^*(y_\nu)(x)$ は一様収束することをいえばよい．今，$u^*(y_\nu)(x) = y_\nu^*(u(x))$ および $\|x\| \leqq 1$ なる x に対し $u(x) \in K$ であり，y_ν^* は K 上

一様収束するので，$u^*(y^*_\nu)$ は B_E 上一様収束する．よって，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$N = N(\epsilon)$ が存在し，$\mu.\nu > N$ のとき，

$$\sup_{\|x\| \leqq 1} \|u^*(y^*_\nu)(x) - u^*(y^*_\mu)(x)\| < \epsilon$$

こうして，$\mu, \nu > N$ ならば

$$\|u^*(y^*_\nu)(x) - u^*(y^*_\mu)(x)\| < \epsilon\|x\| \quad (x \in E)$$

が成り立ち，$u^*(y^*_\nu)$ は E^* で収束する．故に，$u^*(B^*)$ は E^* で相対コンパクト，即ち，u^* はコンパクトである．

□

8.2 有限次元性に関する定理

定理 8 (有限次元性定理)**.** *E, F を Banach 空間とし，$u : E \longrightarrow F$ を連続線形写像とする．さらに，u は単射かつ $u(E)$ は閉部分空間とする．更に，$v : E \longrightarrow F$ をコンパクト連続線形写像とする．そのとき，$\mathrm{Ker}(u+v)$ は有限次元で $(u+v)(E)$ は F で閉である．*

Proof. $N = \mathrm{Ker}(u+v) \subset E$ とおく．N は閉部分空間として Banach 部分空間．N が有限次元ためには,

$$B_N = \{x \in N \ : \ \|x\| \leqq 1\}$$

がコンパクトをいえばよい，実際，このとき，N は局所コンパクトである．局所コンパクト位相線形空間は有限次元なので，結果，N の有限次元である．

8.2.1

$\{x_n\} \subset B_N$ を点列とする．v がコンパクトより, $\overline{v(B_N)}$ はコンパクト（点列コンパクト）部分集合である．よって, 任意の点列 $\{v(x_n)\ (x_n \in N)\}$ は F において収束する部分列 $\{v(x_{n_k}\}$ をもつ．$(u+v)(x_{n_k}) \in (u+v)(N) = \mathbf{0}$ より，$u(x_{n_k}) = -v(x_{n_k})$. 右辺の $v(x_{n_k})$ は F で収束するので，$u(x_{n_k})$ もまた F で収束する．一方，u は単射かつ $u(E)$ は閉部分空間（よって，Banach 部分空間）である．開写像定理から $u : E \cong u(E)$ は同型，即ち，逆線形写像 $u^{-1} : u(E) \cong E$ は連続写像である．特に，

u^{-1} は有界である．故に，$\|u^{-1}(u(x))\| \leqq c \cdot \|u(x)\|$ となる定数 $0 < c \geqq \|u^{-1}\|$ が存在する，こうして，$\|u(x)\| \geqq c\|x\|$ を得る．このとき，

$$\|x_{n_k} - x_{n_\ell}\| \leqq (\frac{1}{c})\|u(x_{n_k}) - u(x_{n_\ell})\| \to 0 \ \ (k.\ell \to \infty)$$

より，$\{x_{n_k}\} \subset N$ は E で収束する．N は E の閉集合なので，$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in N$ である．よって，B_N が点列コンパクトである，即ち，B_N は F のコンパクト集合である．このことから，N は有限次元である． □

8.2.2

今，N は有限次元より，以下に示す命題 18 より，E の閉部分空間 N' が存在して，

$$N \cap N' = \{\mathbf{0}\} \quad \& \quad E = N + N'$$

を得る．今，

$$(u+v)(E) = (u+v)(N+N') = (u+v)(N) + (u+v)(N') = (u+v)(N')$$

● $(u+v)(E)$ は閉であることを示すため，$(u+v)(N') \subset F$ が閉であることを示す．即ち，任意の $y \in \overline{(u+v)(N')}$ に対し，$y \in (u+v)(N')$ を示せばよい．ここで，$y \neq \mathbf{0}$ としてよい．実際，$y = 0$ なら，$(u+v)(N')$ は部分空間ゆえ，$\mathbf{0} \in (u+v)(N')$ を得る．.

$(\because)$ $^\exists x_n \in N'$ が存在して，

$$(u+v)(x_n) = u(x_n) + v(x_n) \to y \in F \text{ as } \ n \to \infty$$

とできる．そこで，$y \in (u+v)(N')$ を示そう．今，$y \neq 0$ と仮定してよい．

まず，$\{x_n\}$ は有界である.

実際，有界でないとすれば，部分列（同じ，x_n で表す）をとり，$\|x_n\| \to \infty$ とできる．$x'_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$ とおくと，$\|x'_n\| = 1$ であって，

$$u(x'_n) + v(x'_n) = \frac{u(x_n) + v(x_n)}{\|x_n\|} \to \frac{y}{\infty} = 0$$

v はコンパクトゆえ，部分列 $\{x'_{n_k}\}$ があって，$\{v(x'_{n_k})\}$ は収束する．よって，$\{u(x'_{n_k})\}$ もまた収束する．$\|u(x)\| \geqq c\|x\| \quad (x \in E)$ より，$\|u(x'_{n_k})\| \geqq c\|x'_{n_k}\|$. よって，$\{x'_{n_k}\}$ は $x_0 \in N'$ に収束する．特に，$\|x_0\| = \lim_{n\to\infty} \|x'_{n_k}\| = 1$. しかし，

$$(u+v)(x_0) = \lim_{n\to\infty} (u(x'_{n_k}) + v(x'_{n_k}) = 0.$$

よって，$x_0 \in N$．一方 $x_0 \in N'$ であったので，$x_0 \in N \cap N' = \{\mathbf{0}\} \quad \therefore \quad x_0 = \mathbf{0}$. これは，$\|x_0\| = 1$ に矛盾する．よって，$\{x_n\}$ は有界である（即ち，$M > 0$ が存在し，$\|x_n\| < M$）． $\square$

また，v のコンパクト性から，部分列 $\{x_\nu\} \subset \{x_n\}$ が存在して，$v(x_\nu)$ は収束する．

$$(u+v)(x_\nu) = u(x_\nu) + v(x_\nu) \to y \in F$$

なので，$\{u(x_\nu)\}$ は収束する. ここで，$u(E)$ は閉集合より，

$$\lim_{\nu\to\infty} u(x_\nu) \in u(E) \quad \therefore \quad \lim_{\nu\to\infty} u(x_\nu) = u(x_0)$$

今，u の単射性から，$u^{-1} : u(E) \cong E$ は同型．このことから，$\|u(x_\nu)\| \geqq c\|x_\nu\|$ なる $c > 0$ を得る．こうして

$$0 \leftarrow \|u(x_\nu) - u(x_0)\| = \|u(x_\nu - x_0)\| \geqq c\|x_\nu - x_0\|$$

$$\therefore \quad x_0 = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu$$

より $y = (u+v)(x_0)$ を得る．こうして，$y \in (u+v)(N')$. $\square$

命題 18. E を位相線形空間とし，$N \subset E$ を有限次元部分空間とする．そのとき，閉部分空間 $N' \subset E$ が存在して，

$$N \cap N' = \{\mathbf{0}\} \quad \& \quad E = N + N'$$

を満たす.

Proof. $\dim_k N = n$ とする．基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ が存在し，$N =< e_1, \cdots, e_n >_k$ を得る．任意の $x \in N$ に対し，${}^\exists\gamma_j(x) \ (1 \leqq j \leqq n)$ が存在し，

$$x = \gamma_1(x)e_1 + \cdots + \gamma_n(x)e_n \cdots\cdots (*)$$

と一意的に表される．今，$(*)$ の表現の一意性から，$\gamma_j : N \longrightarrow \mathbb{C}$ は関数である．一方，各 γ_j の線形性については，

$$x+y = (\gamma_1(x)+\gamma_1(y))e_1+\cdots+(\gamma_n(x)+\gamma_n(y))e_n = \gamma_(x+y)e_1+\cdots+\gamma_n(x+y)e_n$$

と表され，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ が基底より，$\gamma_j(x+y) = \gamma_j(x) + \gamma_j(y) \ (1 \leqq j \leqq n)$ を得る. また，$\gamma_j(E) \subset \mathbb{C}$ は部分ベクトル空間だから,$\gamma_j(E) = \mathbb{C}$ を得る．$\mathrm{Ker}\gamma_j$ もまた有限次元より，閉集合であり，$\psi_j E/\mathrm{Ker}\, r_j \cong \gamma_j(E) = \mathbb{C}$ は Banach 空間の代数的同型より，命題 7 により，位相同型でもある．商写像 $\pi_j : E \longrightarrow E/\mathrm{Ker}\,\gamma_j$ は開写像で $\gamma_j = \psi_j \circ \pi_j$. よって，$\underline{\gamma_j \text{は連続}}$である．従って，Hahn-Banach の定理より，

E 上の連続線形汎関数 $\widehat{\gamma_j} : E \longrightarrow \mathbb{C}$ に拡張できる．$\widehat{\gamma_j}(x) = \gamma_j(x) \ \ (x \in N)$ より，任意の $x \in N$ に対し，

$$x = \widehat{\gamma_1(x)} e_1 + \cdots + \widehat{\gamma_n(x)} e_n \cdots\cdots (**)$$

そこで，

$$N' = \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Ker} \widehat{\gamma_j}$$

とおくと，$N' \subset E$ は閉部分空間で $N' \cap N = \{\mathbf{0}\}$. 何故なら，$x \in N' \cap N$ をとる．各 j について，$\widehat{\gamma_j}(x) = 0$ かつ $(**)$ より，$x = \mathbf{0}$. 一方，$\varphi = (\widehat{\gamma_1}, \cdots, \widehat{\gamma_n}) : E \longrightarrow \mathbb{C}^n$ は連続写像で $\dim_k N = n$ より，$\varphi : N \cong \mathbb{C}^n \quad \text{ie} \quad \varphi(N) = \mathbb{C}^n = \varphi(E)$. 一方，$\mathrm{Ker}\, \varphi = N'$ より，準同型定理から，

$$E/\mathrm{Ker}\, \varphi \cong \varphi(E) = E/N' = \varphi(N)$$

また，$\varphi(E) \subset \mathbb{C}^n = \varphi(N) \cong N \quad \therefore \varphi(E) = \varphi(N) = \mathbb{C}^n = E/N'$

$$\therefore \ \ N + N' = \varphi^{-1}(\varphi(N)) = \varphi^{-1}(\varphi(E)) = E.$$

$\square$

定理 9 (L.Schwartz の有限次元性定理)**.** E , F を $\mathbb{C}$ 上の *Banach* 空間とし，$u, v : E \longrightarrow F$ を連続線形写像とする．u が全射かつ v がコンパクトと仮定する．そのとき，$F' = (u+v)(E)$ は閉部分空間であり，$\dim_{\mathbb{C}} F/F' < \infty$ である．

Proof. (1) 定理 8-(A) より，$F' = (u+v)(E)$ が閉 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $(u+v)^*(F^*)$ が閉．今，$u(E) = F$ は閉より，$u^*(F^*) \subset E^*$ は閉．また，v がコンパクトゆえ，v^* もまたコンパクト．$u : E \longrightarrow F$ が全射より，$u^* : F^* \longrightarrow E^*$ は単射，よって，定理 8 より，$(u^* + v^*)(F^*)$ は閉．よって，$F' = (u+v)(E)$ は閉である． $\square$

(2) F' が閉部分空間より，F/F' は Banach 空間で商写像 $\pi : F \longrightarrow F/F'$ は連続線形開写像である．F/F' が局所コンパクトを示せばよい．

$$B_E = \{z \in E \ : \ \|z\| \leqq 1\}$$

とおく．

$$\varphi : E \overset{u}{\longrightarrow} F \overset{\pi}{\longrightarrow} F/F' \ \ \varphi = \pi \circ u$$

は全射連続線形写像, 特に, 開写像なので, $B := \pi(u(B_E)) = \varphi(B_E)$ が相対コンパクトをいえば, F/F' は局所コンパクト性, こうして, 有限次元性が従う. $\{[z_n]\} \subset B$ に対し, $y_n \in u(B_E)$ が存在し, $[y_n + F'] = [y_n] = [z_n]$ である. また, $\|x_n\| < 1$ なる $x_n \in E$ が存在し, $y_n = u(x_n)$ を得る. 今, v はコンパクトより, $\{v(x_n)\}$ は収束する部分列 $\{z_{n_k} := v(x_{n_k})\}$ を含む. $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0 \in \overline{\varphi(B_E)}$.

$$y_{n_k} = u(x_{n_k}) + v(x_{n_k}) - z_{n_k} \in N - z_{n_k} \Longrightarrow [y_{n_k}] = [z_{n_k}].$$

また, π は連続ゆえ有界である. よって,

$$\|\pi(z_{n_k}) - \pi(z_0)\| = \|\pi(z_{n_k} - z_0)\| \leqq \|\pi\| \cdot \|z_{n_k} - z_0\| \to 0 \ \text{ as } \ k \to \infty,$$

即ち,

$$\lim_{k\to\infty} \pi(z_{n_k}) = \pi(z_0) \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} [z_{n_k}] = [z_0].$$

よって, $\{[z_n]\}$ は $\overline{\varphi(B_E)}$ に収束する部分列をもつ. こうして, $\varphi(B_E)$ は $\mathbf{0}$ の相対コンパクトか開近傍である. よって, F/F' は局所コンパクトとなり, $\dim_{\mathbb{C}} F/F' < \infty$.

$\square$

9　補足１（複素解析から）

9.1　正則関数列とその極限

定理 10 (Cauchy の収束判定条件)**.** 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための必要十分条件は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が **Cauchy** 列をなすことである．即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある番号 $N(\epsilon)$ が存在して，$n > m > N(\epsilon)$ なる全ての m, n に対し，

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

が成立する事（**実数の連続性公理**と同値）.

系 5. 複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための必要十分条件は $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が **Cauchy** 列をなすことである．即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある番号 $N(\epsilon)$ が存在して，$n > m > N(\epsilon)$ なる全ての m, n に対し，

$$|z_n - z_m| < \epsilon$$

が成立する事.

Proof. $z_n = a_n + i\, b_n \ \ a_n, b_n \in \mathbb{R}$ とおき，実数列に関するコーシーの収束判定条件に帰着させる．その際，以下の不等式を用いる：

$$\{|a_n - a_m|, |b_n - b_m|\} \leqq |z_n - z_m| \leqq |a_n - a_m| + |b_n - b_m|$$

□

定義 29. 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の複素関数列 $\{f_n(z)\}$ が D で広義一様収束するとは，任意のコンパクト集合 $K \subset D$ 上，$\{f_n(z)\}$ が一様収束すること．即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある番号 $N(\epsilon, K) > 0$ が存在して，$m, n > N(\epsilon, K)$ なる全ての m, n に対し，任意の $z \in K$ に対し，

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon \ \cdots (*)$$

が成立する事である．今,

$$\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|$$

を関数 $f(z)$ の K 上の **sup-norm** という．このとき，条件 $(*)$ は

$$\|f_n - f_m\|_K < \epsilon$$

をしてもよい.

注意 23. $z \in D$ を固定すれば $\{f_n(z)\}$ は複素数列である．従って，$\{f_n(z)\}$ がCauchy 列をなせば系 2 から収束し，極限値が z に対して唯一つ存在する．それを $f(z)$ と表す．$f(z)$ は $z \in D$ に応じて唯一つ定まるので，D 上の関数 $f : D \to \mathbb{C}$ を定める．こうして，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \quad \text{for} \quad \forall z \in D$$

これを，D 上の関数列 $\{f_n\}$ が D 上の関数 f に**各点収束**するという．$\epsilon - \delta$ 式に表現すれば，各点 $z \in D$ をとれば，任意の $\epsilon > 0$ に対して，番号 $N(\epsilon, z)$ が存在して，$n > N(\epsilon, z)$ なる全ての n に対し，

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

が成立するときをいう．

次に，K 上の関数列 $\{f_n\}$ が K 上の関数 f に**一様収束**するとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\epsilon > 0$ と K のみに関係する番号 $N(\epsilon, K)$ が存在して，$n > N(\epsilon, K)$ なる全ての n に対し，

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \ \cdots \ (*)$$

が任意の $z \in K$ に対して成立するときをいう．今 $z \in K$ に対して，

$$|f_n(z) - f(z)| \leqq \|f_n - f\|_K$$

なので，$(*)$ は

$$\|f_n - f\|_K < \epsilon$$

で置き換えてもよい．

関数列の収束と関数値の収束の区別せよ！

領域 $D \subset \mathbb{C}$ での関数の集まり（関数族）を $\mathcal{F}_D$ とおく．

定義 30. 関数族 $\mathcal{F} := \mathcal{F}_D$ が $\alpha \in D$ で**同程度連続**であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，，$\epsilon > 0$ と α のみ依存する正数 $\delta := \delta(\epsilon, \alpha) > 0$ が存在し，$|z - \alpha| < \delta$ を満たす $z \in D$ に対して

$$|f(z) - f(\alpha)| < \epsilon \quad \text{for} \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

要は,$\delta > 0$が$\mathcal{F}$の個々の関数に依らないという事である．$\mathcal{F}$ が D の各点で同程度連続であるとき，D で同程度連続であるという．

定義 31. 関数族 $\mathcal{F} := \mathcal{F}_D$ が $\alpha \in D$ で**広義一様有界**であるとは，正数 $M_\alpha > 0$ が存在し，

$$|f(\alpha)| < M_\alpha \quad \text{for} \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

を満たす時をいう．ここで，M_α は $\mathcal{F}$ の個々の関数 $f \in F$ に依らないで $\alpha \in D$ のみに依存して取れることが本質的である．関数族 $\mathcal{F}$ が D の各点で広義一様有界のとき，$\mathcal{F}$ は D で広義一様有界という．また，関数族 $\mathcal{F}$ が D で（狭義）一様有界とは，ある正数 $M > 0$ が存在して，$\mathcal{F}$ に属する全ての関数 $f(z) \in F$ に対して，および全ての $z \in D$ に対して

$$|f(z)| < M$$

が成立する時をいう．

注意 24. 関数の一様有界と関数族の一様有界は違うことを注意する．D 上の関数 $f(z)$ が D で一様有界とは，ある正数 $M > 0$ が存在して $|f(z)| < M$ が全ての $z \in D$ で成立することであった．よって，一様有界な関数の族 $\mathcal{F}$ の元は一様有界な関数となる．逆は一般には言えない．この事を各自確かめよ．

9.2 正規族

定義 32. 連続関数の族 $\mathcal{F}_D$ が D で**正規族**とは，$\mathcal{F}_D$ の任意の関数列 $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が D で広義一様収束（コンパクト収束ともいう）する部分列 $\{f_{\nu,j}\}_{j=1}^\infty \subset \{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ を持つときをいう．

注意 25. 連続関数の族のコンパクト性の基準を与えるのが *Ascoli-Arzella* の定理である．

補題 5. 正規族 $\mathcal{F}_D$ に属する関数列 $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が D で各点収束すれば広義一様収束する．

Proof. 背理法による．$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が D で広義一様収束しないとする．そのとき，あるコンパクト集合 $K \subset D$ が存在して $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ は K で一様収束しない．仮定より，各点 $z \in D$ に対して，D 上の関数（極限関数）$f(z)$ が存在し

$$\lim_{\nu \to \infty} f_\nu(z) = f(z)$$

を得る．$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ か K 上一様収束しないので，ある正数 $\epsilon > 0$ および，部分列 $\{f_{\nu,j}\}_{j=1}^\infty$ および点列 $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ が存在して，

$$|f_{\nu,j}(z_j) - f(z_j)| \geqq \epsilon$$

が成立する．これは，$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が K 上一様収束する部分列を含まない事を示しており，$\mathcal{F}_D$ が正規族に反する． □

補題 6. 正規族 $\mathcal{F}_D$ に属する関数列 $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が内点 $\alpha \in D$ に収束する点列 $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ $(z_n \neq \alpha)$ において収束するなら，$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ は D で広義一様収束する．

Proof. 補題 9 より，$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が D で各点収束する事を云えばよい．背理法で示す．$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が D で各点収束しないならば，ある点 $z_0 \in D$ が存在して，$\{f_\nu(z_0)\}_{\nu=1}^\infty$ は収束しない．もし，部分列 $\{f_{\nu,j}\}_{j=1^\infty}$ が存在して．

$$\lim_{j\to\infty} f_{\nu,j}(z_0) = \infty$$

ならば，$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ の部分列 $\{f_{\nu,j}\}_{j=1}^\infty$ は D で広義一様収束しない．これは，$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が正規族 $\mathcal{F}_D$ に属する事に反する．従って，$\{f_\nu(z_0)\}_{\nu=1}^\infty$ の値は有限不確定である．故に，部分列 $\{f_{\nu,j_k}\}_{\mathrm{j}=1}^\infty, \{f_{\nu,j'_k}\}_{k=1}^\infty$ が存在し，

$$\lim_{k\to\infty} f_{\nu,j_k}(z_0) = \gamma \neq \gamma' = \lim_{k\to\infty} f_{\nu,j'_k}(z_0)$$

二つの関数列 $\{f_{\nu,j_k}\}_{\mathrm{j}=1}^\infty, \{f_{\nu,j'_k}\}_{k=1}^\infty$ は正規族 $\mathcal{F}$ に属するので，これらは，D で広義一様収束する部分列を持つ．それぞれの広義一様収束極限を $\varphi(z), \phi(z)$ とおくと，これらは D 上の正則関数を定める．仮定より，D 内で収束する点列 z_n に対し，

$$\lim_{k\to\infty} f_{\nu,j_k}(z_n) = \lim_{k\to\infty} f_{\nu,j'_k}(z_n)$$

ゆえ，$\varphi(z_n) = \phi(z_n)$ が全ての n について成立する．D が領域（連結開集合）なので，一致の定理から $\varphi(z) = \phi(z)$ が D の各点で成立する． よって，$\varphi(z_0) = \phi(z_0)$ である．一方，$\varphi(z_0) = \gamma \neq \gamma' = \phi(z_0)$ なので矛盾である． □

9.3 アスコリ・アルツェラの定理

補題 7 (Montel)**.** 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数全体の集合を $\mathcal{O}(D)$ とおく．$\mathcal{O}(D)$ の部分族

$$\mathcal{F}_D(M) = \{f \in \mathcal{O}(D) \mid {}^\exists M > 0 \ s.t.\ |f(z)| < M \text{ for } \forall z \in D\}$$

は D 上同程度連続である．

Proof. $\forall f \in \mathcal{F} := \mathcal{F}_D(M)$, および任意の点$\forall \alpha \in D$をとる．$D = \{z \in \mathbb{C} \ \ |z-\alpha| < r\} \subset D$であるように$r > 0$を選ぶ．$\overline{D}$の境界を$C_r$とする．$z \in D$に対し，

$$\begin{aligned} f(z) - f(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(\zeta)\left\{\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \alpha}\right\} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(\zeta)\frac{z - a}{(\zeta - z)(\zeta - \alpha)} d\zeta \end{aligned}$$

$\min_{\zeta \in C_r} |\zeta - z| = r - |z - \alpha| > 0$ を用いて，

$$|f(z) - f(\alpha)| \leqq \frac{M \cdot |z - \alpha|}{r - |z - a|}$$

任意の$\epsilon > 0$に対して，

$$\delta := \min(r\, 2^{-1}, \epsilon\, r\, M^{-1} 4^{=1})$$

とおく．そのとき，全ての$f \in \mathcal{F}$に対して，$|z - \alpha| < \delta$ならば，

$$|f(z) - f(\alpha)| \leqq \frac{M \cdot |z - \alpha|}{r - |z - a|} < \frac{M \cdot \delta}{r - \delta} \leqq \frac{M \cdot \epsilon \cdot r\, M^{-1} 4^{-1}}{r - r\, 2^{-1}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

ここで，$\delta > 0$は関数$f \in \mathcal{F}$には依存しない．よって，$\mathcal{F}$はDで同程度連続である． □

補題 8 (Ascoli-Arzelá)**.** 領域Dで関数族$\mathcal{F}$が同程度連続であってかつDの各点$z \in D$において全ての関数$f \in \mathcal{F}$に対して$|f(z)| < M_z$となる正数$M_z > 0$が存在すれば，$\mathcal{F}$はDで正規族である．

Proof. 証明は各自適当なテキストを見て確認しておく事． □

以上より

定理 11 (Montel の定理)**.** 領域$D \subset \mathbb{C}$上の正則関数全体の集合を$\mathcal{O}(D)$とおく．$\mathcal{O}(D)$の部分族

$$\mathcal{F}_D(M) = \{f \in \mathcal{O}(D) \mid {}^{\exists}M > 0 \ s.t. \ |f(z)| < M \text{ for } \forall z \in D\}$$

はD上正規族である．

アスコリ・アルツェラの定理を用いないでモンテルの定理を証明しよう．

定理 12 (スティルティスの定理). 領域 D 上の一様有界な正則関数列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$、即ち，ある正数 $M>0$ が存在して，

$$|f_n(z)| \leqq M, \quad z \in D, \quad n = 1, 2, \cdots$$

とする．このとき，D で広義一様収束する $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{f_{n_k}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．

9.4 スティルティスの定理の証明

D は開集合だから，任意の点 $\alpha \in D$ をとれば，正数 $R>0$ が存在して，$\Delta_R = \{z \in \mathbb{C} : |z-\alpha| \leqq R\} \subset D$ とできる．いま，$0 < r < R$ なる任意の $r > 0$ に対して，$\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\}$ とおく．

(Claim 1) 関数列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ は Δ_r で一様収束する部分列 $\{g_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ をもつ．

実際，簡単のため $\alpha = 0$ としよう．各 $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$f_n(z)$ は Δ で正則ゆえ，$z = 0$ の周りのテーラー展開

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n)} z^k$$

は Δ で一様収束する．各 n に対して $|f_n(z)| < M$ ゆえ，コーシーの評価式より，

$$\left| c_k^{(n)} \right| < \frac{M}{R^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \ n = 1, 2, \cdots$$

(i) : $k = 0$ のとき，$|c_0^{(n)}| < M$ が $n = 1, 2, \cdots$ に対して成り立つので，有界な複素数列である．従って，収束する部分列

$$\{c_0^{(n_j)}\}_{j=0}^{\infty} \subset \{c_0^{(n)}\}_n^{\infty}$$

が存在する．この数列の極限値を A_0 とする．$\{c_0^{(n_j)}\}_{j=1}^{\infty}$ に対応する関数列:

$$\begin{aligned}
f_{n_0}(z) &= c_0^{(n_0)} + c_1^{(n_0)} z + c_2^{(n_0)} z^2 + \cdots \\
f_{n_1}(z) &= c_0^{(n_1)} + c_1^{(n_1)} z + c_2^{(n_1)} z^2 + \cdots \\
&\cdots \\
f_{n_j}(z) &= c_0^{(n_j)} + c_1^{(n_j)} z + c_2^{(n_j)} z^2 + \cdots \\
&\cdots
\end{aligned}$$

を考える．そのとき，

$$\{f_{n_j}(z)\}_{j=1}^{\infty} \subset \{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$$

である．

$(ii) : k = 1$ のとき，$\{c_1^{(n_j)}\}_{j=0}^{\infty} \subset \{c_1^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ かつ

$$|c_1^{(n)}| < \frac{M}{R},\ n = 1, 2, \cdots$$

ゆえ，

$$|c_1^{(n_j)}| < \frac{M}{R},\ j = 0, 1, \cdots$$

よって，収束する部分列 $\{c_1^{(n'_j)}\}_{j=0}^{\infty} \subset \{c_1^{(n_j)}\}_{j=0}^{\infty}$ をもつ．この部分列の極限値を A_1 とおく．$\{c_1^{(n'_j)}\}_{j=0}^{\infty}$ に対応する関数列

$$\begin{aligned}
f_{n'_0}(z) &= c_0^{(n'_0)} + c_1^{(n'_0)} z + c_2^{(n'_0)} z^2 + c_3^{(n'_0)} z^3 + \cdots \\
f_{n'_1}(z) &= c_0^{(n'_1)} + c_1^{(n'_1)} z + c_2^{(n'_1)} z^2 + c_3^{(n'_0)} z^3 \cdots \\
&\cdots \\
f_{n'_j}(z) &= c_0^{(n'_j)} + c_1^{(n'_j)} z + c_2^{(n'_j)} z^2 + \cdots \\
&\cdots
\end{aligned}$$

を考える．ここで，

$$\{c_0^{(n'_j)}\} \subset \{c_0^{(n_j)}\},\ \{c_1^{(n'_j)}\} \subset \{c_1^{(n_j)}\}$$

である．

我々は関数列 $\{f_{n_j}(z)\}_{j=0}^{\infty}$ の z の係数列 $\{c_1^{(n_j)}\}_{j=0}^{\infty}$ に着目し，その部分列に対応する関数列を選んでいる事から，

$$\{f_{n'_j}(z)\}_{j=0}^{\infty} \subset \{f_{n_j}(z)\}_{j=0}^{\infty}$$

である．

$(iii) : k = 2$ のとき，全ての n について，

$$|c_2^{(n)}| < \frac{M}{R^2}$$

だから，$\{c_2^{(n'_j)}\}_{j=0}^{\infty}$ に対しても

$$|c_2^{(n'_j)}| < \frac{M}{R^2},\ j = 0, 1, \cdots$$

が成立する．こうして，収束する部分列

$$\{c_1^{(n''_j)}\}_{j=0}^{\infty} \subset \{c_1^{(n'_j)}\}_{j=0}^{\infty},\ \{c_2^{(n''_j)}\}_{j=0}^{\infty} \subset \{c_2^{(n'_j)}\}_{j=0}^{\infty}$$

が存在する．この部分列の極限値を A_2 とする．そこで，
$\{c_2^{(n''_j)}\}_{j=0}^{\infty}$ に対応する次の関数列を考える．

$$\begin{array}{rcl}
f_{n''_0}(z) &=& c_0^{(n''_0)} + c_1^{(n''_0)} z + c_2^{(n''_0)} z^2 + c_3^{(n'_0)} z^3 \cdots \\
f_{n''_1}(z) &=& c_0^{(n''_1)} + c_1^{(n''_1)} z + c_2^{(n''_1)} z^2 + c_3^{(n''_1)} z^3 \cdots \\
&\cdots& \\
f_{n''_j}(z) &=& c_0^{(n''_j)} + c_1^{(n''_j)} z + c_2^{(n''_j)} z^2 + c_3^{(n''_j)} z^3 \cdots \\
&\cdots&
\end{array}$$

関数列 $\{f_{n''_j}(z)\}_{j=0}^{\infty}$ の選び方から，関数列の部分列の包含関係：

$$\{f_{n''_j}(z)\}_{j=0}^{\infty} \subset \{f_{n'_j}(z)\}_{j=0}^{\infty} \subset \{f_{n_j}(z)\}_{j=0}^{\infty} \subset \{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$$

を得る．同様に，部分列 $\{f_{n'''_j}(z)\}_{j=0}^{\infty}$ を得る．

$$\begin{array}{l}
\{c_0^{(n'''_j)}\} \subset \{c_0^{(n''_j)}\} \subset \{c_0^{(n'_j)}\} \subset \{c_0^{(n_j)}\} \to A_0 \\
\{c_1^{(n'''_j)}\} \subset \{c_1^{(n''_j)}\} \subset \{c_1^{(n'_j)}\} \to A_1 \\
\{c_2^{(n'''_j)}\} \subset \{c_2^{(n''_j)}\} \to A_2
\end{array}$$

さて，正則関数列 $g_0(z), g_1(z), g_2(z), \cdots$

$$\begin{array}{rcl}
g_1(z) &=& c_0^{(n_1)} + c_1^{(n_1)} z + c_2^{(n_1)} z^2 + \cdots \\
g_2(z) &=& c_0^{(n'_0)} + c_1^{(n'_1)} z + c_2^{(n'_2)} z^2 + \cdots \\
g_3(z) &=& c_0^{(n''_0)} + c_1^{(n''_1)} z + c_2^{(n''_2)} z^2 + c_3^{(n''_3)} z^3 \cdots \\
g_4(z) &=& c_0^{(n'''_0)} + c_1^{(n'''_1)} z + c_2^{(n'''_2)} z^2 + c_3^{(n'''_3)} z^3 \cdots \\
&\cdots&
\end{array}$$

を考える．そこで，改めて

$$g_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(m)} z^k \quad (m \geqq 0)$$

とおく．このとき，$\lim_{m\to\infty} b_k^{(m)} = A_k\ (k \geqq 1)$

Δ_R 上の正則関数列 $\{g_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ は Δ_r 上 $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$ に一様収束する．ここに，$\{g_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ は $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列である．

今，$g(z)$ は Δ_R で正則である．実際，収束半径を求めると

$$|b_k^{(m)}| \leqq \frac{M}{R^k} \Longrightarrow |A_k| \leqq \frac{M}{R^k}\ \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

より

$$\frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|A_k|}} = \frac{R}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{M}} = R$$

を得る．よって，$g(z)$ は Δ_R で正則である．

さて, $\epsilon > 0$ に対し, $N > 0$ を十分大きくとれば, $0 < \dfrac{r}{R} < 1$ より，$\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\dfrac{r}{R}\right)^k < \epsilon$ とできる．この N を固定して

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

とおく．$N' > 0$ を十分大きくとれば，$\forall m > N'$ に対し，

$$|b_k^{(m)} - A_k| < \epsilon\ \ (k = 0, 1, \ldots, N),$$

とできる．$k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，

$$|A_k|, |b_k^{(m)}| \leqq \frac{M}{R^k}\ \ (m = 1, 2, \ldots)$$

に注意すれば，任意の $m \geqq N'$ および，任意の $z \in \Delta_r$ に対して，

$$\begin{aligned}
|g_m(z) - g(z)| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(m)} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k\right| \\
&= \sum_{k=0}^{N} |b_k^{(m)} - A_k||z|^k \\
&+ \sum_{k=N+1}^{\infty} (|b_k^{(m)} + |A_k|)|z|^k \\
&< (L + 2M)\epsilon
\end{aligned}$$

よって，$\{g_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ は Δ_r で $g(z)$ に一様収束する．

領域 D の有理点全体は可算集合より $\{z_i\}_{i=1}^\infty$ と番号をつける事ができる．z_i と ∂D の距離を $d_i > 0$ で表し，中心 z_i, 半径 $\dfrac{d_i}{2}$ の閉円板を δ_i とする．このとき，

$$D = \bigcup_{i=0}^{\infty} \delta_i$$

である．まず，**(Claim 1)** より δ_1 で一様収束する部分列 $\{f_{1n}\}_{n=1}^\infty$ が存在する．この極限関数を $f^{(1)}(z)$; $(z \in \delta_1)$ とする．次に，$\{f_{1n}\}$ の部分列で δ_2 上一様収束する関数列を $\{f_{2n}\}$ とし，その極限関数を $f^{(2)}(z)$; $(z \in \delta_2)$ とする．このとき，取り方から，$\{f_{2n}(z)\}$ は $\delta_1 \cup \delta_2$ で一様収束する．特に，$f^{(2)}(z) = f^{(1)}(z)$; $z \in \delta_1$. 以下，同様に

$$\begin{array}{llllll}
f_{11}, & f_{12}, & f_{13}, \cdots & \to f^{(1)}(z), & & z \in \delta_1 \\
f_{21}, & f_{22}, & f_{23}, \cdots & \to f^{(2)}(z), & & z \in \delta_1 \cup \delta_2 \\
f_{31}, & f_{32}, & f_{33}, \cdots & \to f^{(3)}(z), & & z \in \delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\cdots & f_{kk} & \cdots & \cdots & \to f^{(k)}(z), & z \in \displaystyle\bigcup_{\ell=1}^{k} \delta_\ell \\
\cdots & \cdots & f_{k+1\,k+1} & \cdots & \to f^{(k+1)}(z), & z \in \displaystyle\bigcup_{\ell=1}^{k+1} \delta_\ell \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & &
\end{array}$$

そこで，このダイアグラムの対角線にある関数列

$$f_{11}(z),\ f_{22}(z),\ f_{33}(z), \ldots$$

を考える．その構成法より，$k \geqq 1$ を固定した時，対角線に位置する正則関数列 $\{f_{mm}(z)\}_{m=k,k+1,\ldots}$ は $\{f_{k\ell}(z)\}_{\ell=1,2,\ldots}$ の部分列である．従って，$\{f_{mm}(z)\}_{m=1}^\infty$ は δ_k 上で $f^{(k)}(z)$ に一様収束する．

$$\lim_{m\to\infty} f_{mm}(z) = f^{(k)}(z) = \lim_{\ell\to\infty} f_{k\ell}(z) \quad \text{if} \quad z \in \delta_k$$

$k \geqq 1$ は任意なので，$\{f_{mm}(z)\}_{m=1}^\infty$ は D で各点収束する．この収束は，実は，広義一様収束である．実際，任意にコンパクト集合 $K \subset D$ をとれば，

$$K \subset D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \delta_i$$

ゆえ，K のコンパクト性から，有限個の $\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_N}$（$N$ 個とする）が存在して，$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} \delta_{i_j}$ とできる．このとき，$\{f_{mm}(z)\}_{m=1}^{\infty}$ は各 δ_{i_j} 上で一様収束するから，K 上でも一様収束する． □

9.5　有界正則関数全体の Banach 空間

$D \subset \mathbb{C}$ を有界領域，即ち，$\mathbb{C}$ 内の相対コンパクトな連結開集合とする．簡単のため，D は単連結とし，D の境界 $C = \partial D$ は区分的に滑らかなジョルダン閉曲線とする．

$$\mathcal{O}_b(D) = \{f \in \mathcal{O}(D) \ : \ \|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)| < +\infty\}$$

を D 上の有界正則関数全体とする．

定理 13. $\mathcal{F} := \mathcal{O}_b(D)$ は *Banach* 空間である．

Proof.　(1) $\mathcal{F}$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間で，

$$\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)|$$

は $\mathcal{F}$ 上のノルムを与える．実際，$\|f\| = 0$ ならば $|f(z)| = 0$ がすべての $z \in D$ に対して成り立つので，$f \equiv 0$ を得る．

(2)　$\mathcal{F}$ の完備性について示そう．

実際，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ をコーシー列とする．即ち，

任意の $\epsilon > 0$ に対して，$N > 0$ が存在して，$m, n > N$ ならば，$\|f_m - f_n\| < \epsilon$ とする．このとき，

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon \quad (z \in D) \quad \text{for} \quad m, n > N$$

各点 $z \in D$ に対し，複素数列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ に於いてコーシー列をなすので, $\mathbb{C}$ の完備性から収束する．極限値を $f(z)$ とする．即ち，$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = f(z)$ とする．収束の一意性から $f(z)$ は D 上の関数を定める．

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |f_n(z) - f(z)| + |f_n(z) - f_m(z)| + |f_m(z)| \\ &\leqq |f_n(z) - f(z)| + \|f_n - f_m\| + \|f_m\| \\ &\leqq \|f_m\| + \epsilon \end{aligned}$$

$$\lim_{m\to\infty} |f_n(z) - f_m(z)| = |f_n(z) - f(z)| \leqq \lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|$$

$$\therefore \sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| \leqq \lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| \right) \leqq \lim_{m,n\to\infty} \|f_n - f_m\| = 0$$

こうして，$f_n(z)$ は $f(z)$ に D で一様収束する．正則関数の一様収束極限は正則ゆえ（モレラの定理から示せる），$f(z)$ も D で正則である．こうして，$\mathcal{O}_b(D)$ は完備であり，結果，Banach 空間である．

□

9.6 Morera の定理（コーシー積分定理の逆）

定理 14 (Cauchy の積分定理). $D \subset \mathbb{C}$ を単連結領域とし，$f(z)$ を D で正則とする．そのとき，任意の閉曲線 γ に対し，$\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

注意 26 (Cauchy の積分定理の特別版). (1) C を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線とし，$D = (C)$ を C で囲まれる有界領域とする．ここで，C で囲まれる領域は有界な部分（内部）と非有界な部分（外部）があるが，C で囲まれる部分とは有界な部分を（内部）をいう．このとき，D 内の任意の単純閉曲線 γ の内部は D の点からなり，D は単連結（関数論的単連結）となる．

$f(z)$ を領域 $D = (C)$ で正則かつ C で連続ならば，$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成立する．これもまた，コーシー積分定理の特別な場合である．更に，任意の単純閉曲線 $\gamma \subset D$ に対し，$\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

(2) 閉円板 $\overline{\Delta}$ で連続かつ開円板 Δ で正則な関数 $f(z)$ に対し，$\displaystyle\int_{\partial[Delta} f(z)\,dz = 0$ が成立する．

命題 19 (モレラの定理). $D \subset \mathbb{C}$ を連結開集合とし，$f(z)$ を D 上の連続関数とする．区分的に滑らかな任意の閉曲線 $\gamma \subset D$ に対し，$\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ ならば，$f(z)$ は D で正則である．

Proof. $\alpha \in D$ を固定する．$z \in D$ を任意にとる．γ_1 を α と z を結ぶ区分的に滑らかな曲線とする．γ_2 を α と z を結ぶ他の区分的に滑らかな曲線とする．$\gamma - \gamma_1 = \gamma\gamma_1^{-1}$

は区分的に滑らかな閉曲線ゆえ，$\displaystyle\int_{\gamma-\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta = 0$．よって，

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta$$

より，

$$F(z) = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$$

は z と α を結ぶ区分的に滑らかな曲線の取り方によらず，α と z にのみに依存する．$|h| < \epsilon$ なる $h \in \mathbb{C}$ を $(z+h) \in D$ となるように選ぶ．

$$F(z+h) - F(z) = \int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_z^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta$$

ただし，Γ は z と $z+h$ を結ぶ線分 $\varphi : [0,1] \longrightarrow \Gamma :\ \varphi(t) = z + th$.

$$\begin{aligned}
\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h}\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta - f(z) \\
&= \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)hdt - f(z) \\
&= \int_0^1 f(z+th)dt - f(z) \\
&= \int_0^1 (f(z+th) - f(z))\,dt
\end{aligned}$$

$f(z)$ の連続性から，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$|h| < \delta$ に対

$$|f(z+th) - f(z)| < \epsilon$$

よって，

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \leqq \int_0^1 |f(z+th) - f(z)|\,dt \leqq \epsilon$$

$$\therefore\quad F'(z) = f(z) \quad (z \in D)$$

よって，$F(z)$ は D の各点で複素微分可能かつ $F'(z)$ は連続である．こうして，$F(z)$ は正則関数．正則関数の導関数もまた正則ゆえ，$f(z)$ は D で正則になる． □

<u>レポート</u> 2. 正則関数列 $\{f_n(z)\} \subset \mathcal{O}(D)$ の広義一様収束極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ は D で正則である．

概略. D に相対コンパクトに含まれる開円板 Δ に対し，$f_n(z)$ は $\overline{\Delta}$ 上 $f(z)$ に一様収束する．また，γ を Δ 内の任意の単純閉曲線とすれば，コーシーの積分定理から $\displaystyle\int_\gamma f_n(z)\,d = 0$ である．γ 上で一様収束するので

$$0 = \lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma \left(\lim_{n\to\infty} f_n(z)\right)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

より，モレラの定理を適用すれば $f(z)$ は開円板 Δ で正則である．開円板 Δ の任意性から，結果的に $f(z)$ は D の各点（の近傍）で正則であることがわかる． $\square$

10　コンパクトリーマン面上の解析的コホモロジー群の有限次元性

10.1　解析的コホモロジー群 $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$

X をリーマン面（必ずしもコンパクトではない）とする．$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ を X の開被覆（an open covering）とする．即ち，各 U_i は X の開集合で，$X = \displaystyle\bigcup_{i\in I} U_i$.

- $\mathcal{O}(U)$:開集合 $U \subset X$ 上の正則関数全体のなす $\mathbb{C}$ 代数（$\mathbb{C}$-algebra）
- $\mathcal{O}(\emptyset) = \{0\}$
- $C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = \{(g_{ij})_{i,j\in I} \mid g_{ij}\mathcal{O}(U_i \cap U_j) \text{ for all } i, j \in I\}$
- $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = \{(g_{ij} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \;:\; g_{ij} + g_{jk} = g_{ik} \text{ on } U_i \cap U_j \cap U_k \text{ for all } i, j, k \in I\}$,
  但し，$U_i \cap U_j \cap U_k = \emptyset$ の時は条件は空である．
- $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = \{(g_i)_{i\in I} \;:\; g_i \in \mathcal{O}(U_i)\}$
- $\delta : C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ を

$$\delta\left((g_i)_{i\in I}\right) = (g_{ij})_{i,j\in I} = \left(g_i|_{U_i\cap U_j} - g_j|_{U_i\cap U_j}\right) = \{(g_i - g_j)_{i,j\in I}\}$$

- $B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = \delta\left(C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})\right) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$

注意 27. $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}), Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}), C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}), B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間で，δ は $\mathbb{C}$ 上の線形写像である．

定義 33. $\mathbb{C}$ 上の商空間 $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})/B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ を $\mathcal{O}$-係数の第 *1* コホモロジー群（第 *1* 解析的コホモロジー群）という．

注意 28. $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である．

10.2　開被覆の細分から誘導されるコホモロジー群の準同型写像

$\mathfrak{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を X のもう一つの開被覆とする．そのとき，

定義 34. $\mathfrak{V}$ が $\mathfrak{U}$ の細分（*a refinement*）であるとは，写像 $\tau : \Lambda \longrightarrow I$ が存在し，$V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)}$ がすべての $\alpha \in \Lambda$ について成立するとき．この写像 τ を細分写像という．

細分写像 $\tau : \Lambda \longrightarrow I$ はコホモロジー群の間の $\mathbb{C}$-線形写像：

$$\tau^* : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$$

を誘導する．τ^* は次で与えられる：

$\xi = (g_{ij})_{i,j\in I} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ をとる．線形写像 $\tilde{\tau} : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow C^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ を

$$\tilde{\tau}(\xi) = \{(h_{\alpha\beta})\}_{\alpha,\beta\in\Lambda} = \{g_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}|_{V_\alpha\cap V_\beta}\}_{\alpha,\beta\in L}$$

で定義する．そのとき，

- $\tilde{\tau}\left(Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})\right) \subset Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$
- $\tilde{\tau}\left(B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})\right) \subset B^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$

このことから，誘導写像

$$\tau^* : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$$

を得る．このとき，τ^* は線形写像である．

注意 29. $(g_{ij})_{i,j\in I}$ ならば，$g_{ii} = 0$，$g_{ij} = -g_{ji}$ が全ての $i, j \in I$ で成立する．実際，$g_{ij} + g_{jk} = g_{ik}$ より，$i = j = k$ とおけば，$2g_{ii} = g_{ii}$ なので，$g_{ii} = 0$. 一方，$i = k$ とおけば，$g_{ij} + g_{ji} = g_{ii} = 0$ より $g_{ij} = -g_{ji}$ を得る．

命題 20. $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ および $\mathfrak{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を X の 2 つの開被覆とし，さらに，$\mathfrak{V}$ は $\mathfrak{U}$ の細分であると仮定する．$\tau : \Lambda \longrightarrow I$ を細分写像，即ち，$V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)}$ が全ての $\alpha \in \Lambda$ に対して成立している，とする．そのとき，

$$\tau^* : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$$

は単射である．

Proof. $\xi = (g_{ij})_{ij\in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ を $[\xi] \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ の代表元とし，$\tau^*([\xi]) = 0$ とする．$[\xi] = \xi + B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ かつ $\tilde{\tau}\left((B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})\right) \subset B^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ ゆえ，$\tau^*([\xi]) = 0$ は $\tilde{\tau}(\xi) \in B^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ を意味する．よって，$\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ が存在し，

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}(\xi) &= \tilde{\tau}\left((g_{ij})_{i,j\in I}\right) \\
&= \{g_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}\}_{\alpha,\beta\in\Lambda} = \{g_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}|_{V_\alpha\cap V_\beta}\}_{\alpha,\beta\in\Lambda} \\
&= \{h_\alpha - h_\beta\}_{\alpha,\beta\in\Lambda} \in \delta\left(C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O})\right) = B^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})
\end{aligned}$$

即ち,

$$g_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} = h_\alpha - h_\beta \ \text{ on } \ V_\alpha \cap V_\beta$$

今, $i \in I$ および $x \in U_i$ とする. $\mathfrak{V}$ は X の開被覆であるので, $x \in V_\alpha$ となる $V_\alpha \in \mathfrak{V}$ が存在する. そこで,

$$g_i(x) = h_\alpha(x) - g_{\tau(\alpha)i}(x)$$

と定義する.

$g_i(x)$ の表示は α の取り方に依らない. 実際, $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ なる β をとる.

$$g_{i\tau(\alpha)i}(x) + g_{i\tau(\alpha\beta)}(x) = g_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}(x) \quad \text{on} \quad x \in U_i \cap V_\alpha \cap V_\beta$$

より

$$\begin{aligned}
&h_\alpha(x) - g_{\tau(\alpha)i}(x) - h_\beta(x) + g_{\tau(\beta)i}(x) \\
&\qquad = -h_\beta(x) + h_\alpha(x) - g_{\tau(\alpha)i}(x) - g_{i\tau(\beta)}(x) \\
&\qquad = -h_\beta(x) + h_\alpha(x) - g_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}(x) \\
&\qquad = 0
\end{aligned}$$

から分かる. よって, $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$. 今, $x \in U_i \cap U_j$ と仮定する. $x \in U_i \cap U_j \cap V_\alpha$ なる $\alpha \in \Lambda$ を選ぶ.

$$\begin{aligned}
g_i(x) - g_j(x) &= h_\alpha(x) - g_{\tau(\alpha)i}(x) - h_\alpha(x) + g_{\tau(\alpha)j}(x) \\
&= g_{i\tau(\alpha)}(x) + g_{\tau(\alpha)j}(x) = g_{ij}(x)
\end{aligned}$$

こうして,

$$\{(g_{ij})_{ij}\}_{i,j\in I} \in \delta\left(C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})\right) = B(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$$

このことは, $[\xi] = 0$ を意味する. □

注意 30. (1) τ^* は $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ にのみ依存する. つまり, $\sigma, \tau : \Lambda \longrightarrow I$ を細分写像, 即ち, 任意の $V_\alpha \in \mathfrak{V}$ に対し,

$$V_\alpha \subset U_{\sigma(\alpha)\tau(\alpha)} = U_{\sigma(a)} \cap U_{\tau(a)}$$

ならば, $\tau^* = \sigma^*$ である.

実際, $k : C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \xrightarrow{k} C^p(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ を,

$$k(f)|_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p} = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j f_{\sigma(\alpha_0)\cdots\sigma(\alpha_j)\tau(\alpha_j)\cdots\tau(\alpha_p)}$$

その時, $\delta \circ k + k \circ \delta : C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow C^p(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ を得る.

補題 9.

$$\delta \circ k + k \circ \delta = \tilde{\tau} - \tilde{\sigma}$$

注意 31. 特に, $\delta f = 0$ ならば, $f \in Z^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ であり, $\delta(k(f)) = \tilde{\tau}(f) - \tilde{\sigma}(f) \in B^p(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$. よって,

$$[\tilde{\tau}(f)] - [\tilde{\sigma}(f)] = 0 \in H^p(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$$

$\sigma^*([f]) = [\tilde{\sigma}(f)]$ に注意すれば，結果的に，$\sigma^* = \tau^*$ を得る．こうして，$\mathfrak{V}$ を $\mathfrak{U}$ の細分とするとき，準同型写像 $\tau^* : H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^p(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ は細分写像 $\tau : \Lambda \longrightarrow I$ の取り方に依らずに，$\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ だけに依存する．このことから，τ^* を

$$\rho_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} : H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^p(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$$

と書く.

補題 *9* の証明を $p = 1$ のときに示す．$f \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ をとる．

$$\begin{aligned}
(\delta(kf) + k(\delta f))_{\alpha\beta} &= (kf)_\beta - (kf)_\alpha + (\delta f)_{\sigma(\alpha)\tau(\alpha)\tau(\beta)} - (\delta f)_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)\tau(\beta)} \\
&= f_{\sigma(\beta)\tau(\beta)} - f_{\sigma(\alpha)\tau(\alpha)} \\
&+ f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} - f_{\sigma(\alpha)\tau(\beta)} + f_{\sigma(\alpha)\tau(\alpha)} \\
&- f_{\sigma(\beta)\tau(\beta)} + f_{\sigma(a)\tau(\beta)} - f_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)} \\
&= f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} - f_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)} \\
&= \tilde{\tau}(f)|_{\alpha\beta} - \tilde{\sigma}(f)|_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \delta \circ k + k \circ \delta = \tilde{\tau} - \tilde{\sigma}.$$

(2) $\tau^* := \rho_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ は単射である．

実際，$[f] \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ をとる．今，$f = \{(f_{ij})_{i,j \in I}\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ を $[f]$ の代表元とする．そのとき，$[f] = [f + B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})]$．$\tau^*([f]) = 0$ とする．そのとき，

$$\tilde{\tau}(f) \in B^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) = \delta\left(C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O})\right)$$

を得る．よって，$h = \{(h_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda} \in C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ が存在して，

$$\tilde{\tau}(f)|_{\alpha\beta} = f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} = \delta(h)|_{\alpha\beta} = h_\beta - h_\beta$$

とを得る．各 $U_i \in \mathfrak{U}$ に対して，$U_i = \bigcup_\alpha (U_i \cap V_\alpha)$ である．そこで，

$$f_i^\alpha := f_{\tau(\alpha)i} + h_\alpha$$

とおく．そのとき，

$$\begin{aligned}
f_i^\alpha - f_i^\beta &= f_{\tau(\alpha)i} + h_\alpha - f_{\tau(\beta)i} - h_\beta \\
&= -f_{\tau(\beta)i} - f_{i\tau(\alpha)} + h_\alpha - h_\beta \\
&= -f_{\tau(\beta)\tau(\alpha)} + h_\alpha - h_\beta \\
&= f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} + h_\alpha - h_\beta \\
&= 0
\end{aligned}$$

よって，$f_i := f_i^\alpha := f_{\tau(\alpha)i} + h_\alpha$ は $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$ となる．

$$\begin{aligned}
f_j - f_i &= f_{\tau(\alpha)j} + h_\alpha - \left(f_{\tau(\alpha)i} + h_\alpha\right) \\
&= f_{\tau(\alpha)j} - f_{\tau(\alpha)i} \\
&= f_{\tau(\alpha)j} + f_{i\tau(\alpha)} \\
&= f_{i\tau(\alpha)} + f_{\tau(\alpha)j} \\
&= f_{ij}
\end{aligned}$$

よって，$[f] = 0$ を得る．こうして，τ^* は単射である． □

(3) 定義と命題 *20* は形式的ゆえ, この論法は任意の複素多様体に対して応用可能.

定義 35. X をリーマン面とし，$U \subset X$ を開集合とする．

(a) U が平面領域（*planar*）とは，ある平面領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ および解析同型

$$\phi : U \xrightarrow{\sim} \Omega$$

が存在するとき.

(b) U が解析的円板であるとは，解析的同型

$$\phi : U \xrightarrow{\sim} D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < R\}$$

が存在するとき.

次の定理は，ミッタグ・レフラーの定理と言われるものである：

補題 10. U を X 内の平面領域とすると, U の任意の開披腹 $\mathfrak{U}$ に対し, $H^1(\mathfrak{U},\mathcal{O})=0$. 即ち，$\forall (g_{ij})_{i.j\in I}\in Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{O})$ ならば，$\exists (g_i)_{i\in I}\in C^0(\mathfrak{U},\mathcal{O})$ が存在して，$g_{ij}(x)=g_i(x)-g_j(x)$ が $x\in U_i\cap U_j$ に対し成立.

定理 15 (Leray's Theorem)**.** X をリーマン面とし，$\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ を X の開被覆で, 特に，各 U_i は平面領域と仮定する．$\mathfrak{V}=\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を $\mathfrak{U}$ の細分で，$\tau:\Lambda\longrightarrow I$ を各 $\alpha\in\Lambda$ に対し，$V_\alpha\subset U_{\tau(\alpha)}$ をみたすものとする．そのとき，誘導写像

$$\tau^*:H^1(\mathfrak{U},\mathcal{O})\longrightarrow H^1(\mathfrak{V},\mathcal{O})$$

は同型写像である．

Proof. 注意 24-(2) より，τ^* の全射性を示せばよい．$[g]\in H^1(\mathfrak{V},\mathcal{O})$ をとる．そのとき，$g=(g_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}\in Z^1(\mathfrak{V},\mathcal{O})$ を $[g]$ の代表元とする．各 $i\in I$ に対し，$U_i=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(U_i\cap V_\alpha$ ゆえ，$U_i\mathfrak{V}=\{U_i\cap V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ は U_i の開被覆である．各，$U_i\cap V_\alpha$ は平面領域である．

$$g^{(i)}_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}|_{U_i\cap V_\alpha\cap V_\beta}$$

とおく．そのとき，$(g^{(i)}_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}\in Z^1(U_i\cap\mathfrak{V},\mathcal{O})$ である．U_i は平面領域なので, $H^1(U_i\cap\mathfrak{V},\mathcal{O})=0$ である．よって，${}^\exists\{f^{(i)}_\alpha\}_\alpha\in\mathcal{O}(U_i\cap\mathfrak{V})$ が存在し,

$$f^{(i)}_\beta-f^{(j)}_\alpha=g^{(i)}_{\alpha\beta}\quad\text{on}\quad U_i\cap V_\alpha\cap V_\beta$$

を得る．$U_i\cap U_j\cap V_\alpha\cap V_\beta\subset V_\alpha\cap V_\beta$ ゆえ,

$$g^{(i)}_{\alpha\beta}=g^{(j)}_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}\quad\text{on}\quad U_i\cap U_j\cap V_\alpha\cap V_\beta$$

即ち,

$$f^{(i)}_\beta-f^{(i)}_\alpha=f^{(j)}_\beta-f^{(j)}_\alpha\quad\text{on}\quad U_i\cap U_j\cap V_\alpha\cap V_\beta$$

よって，任意の $\alpha,\beta\in L$ に対し，$f_{ij}:=f^{(i)}_\alpha-f^{(j)}_\alpha=f^{(j)}_\beta-f^{(j)}_\beta$ は $f_{ij}\in\mathcal{O}(U_i\cap U_j)$ となる．

- $f=(f_{ij})_{i,j\in I}\in Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{O})$.

($\because$) $x\in U_i\cap U_j\cap U_k$ に対し，$x\in V_\alpha$ なる $\alpha\in\Lambda$ を選ぶ．そのとき,

$$\begin{aligned}f_{ij}(x)+f_{jk}(x)&=\big(f^{(i)}_\alpha(x)-f^{(j)}_\alpha(x)\big)+\big(f^{(j)}_\alpha(x)-f^{(k)}_\alpha(x)\big)\\&=f^{(i)}_\alpha(x)-f^{(k)}_\alpha(x)\\&=f_{ik}(x)\end{aligned}$$

今，$V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)}$ より，

$$h_\alpha := f_\alpha^{\tau(\alpha)} \in \mathcal{O}(U_{\tau(\alpha)} \cap V_\alpha) = \mathcal{O}(V_\alpha)$$

よって，$h = \{h_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$. そのとき，次を得る：

$$g_{\alpha\beta} = -f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} + h_\alpha - h_\beta$$

実際,

$$\begin{aligned}
f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} - h_\alpha + h_\beta &= = f_\alpha^{(\tau(\alpha))} - f_\alpha^{(\tau(\beta))} - f_\alpha^{(\tau(\alpha))} + f_\beta^{(\tau(\beta))} \\
&= -\left(f_\alpha^{(\tau(\beta))} - f_\beta^{(\tau(\beta))}\right) = -g_{\alpha\beta}^{(\tau(\beta))} \\
&= -g_{\alpha\beta} \quad \text{on} \quad V_\alpha \cap V_\beta
\end{aligned}$$

よって，$\tilde{\tau}(-f)_{\alpha\beta} = f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} = g_{\alpha\beta} + h_\beta - h_\alpha$．また，$h_\beta - h_\alpha \in \delta(h) \in B^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ より，

$$\tau^*(-[f]) = [\tilde{\tau}(-f)] = [\{g_{\alpha\beta\}} + \{h_\beta - h_\alpha\}] = [\{g_{\alpha\beta}\}] = [g] \in H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$$

今，$f \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ ゆえ，$[f] \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$．こうして，$\tau$ の全射性が示された．以上により，証明は完結する． □

系 6. $\mathfrak{U}_1$ および $\mathfrak{U}_2$ をリーマン面 X の平面領域からなる開被覆とする．そのとき，$\mathbb{C}$ ベクトル空間 $H^1(\mathfrak{U}_1, \mathcal{O})$ と $H^1(\mathfrak{U}_2, \mathcal{O})$ は同型である．

Proof. $\mathfrak{U}_1$ と $\mathfrak{U}_2$ 両方の細分 $\mathfrak{V}$ が存在することを示せば

$$H^1(\mathfrak{U}_1, \mathcal{O}) \cong H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) \cong H^1(\mathfrak{U}_2, \mathcal{O})$$

を得る．

実際，$\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = \{W_{i\alpha} := U_i \cap V_\alpha\}_{(i,\alpha)\in I\times\Lambda}$ とおく．$X = \displaystyle\bigcup_{(i,\alpha)\in I\times\Lambda} (U_i \cap V_\alpha)$ なので $\mathfrak{V}$ は X の開被覆である．$\tau_i : I \times \Lambda \to I$ を $W_{i\alpha} \subset U_{\tau(i,\alpha)} = U_i$．一方，$\tau_\alpha : I \times \Lambda \to \Lambda$ を $W_{i\alpha} \subset V_{\tau_\alpha}(i, \alpha) = V_\alpha$ で与える． □

注意 32. $\mathfrak{V}$ が $\mathfrak{U}$ の細分であるとき, $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{V}$ と書く．細分の列 $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{V} \leqq \mathfrak{W}$ に対し,

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}} H^p(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}} H^p(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

細分写像を $\Sigma \xrightarrow{\sigma} \Lambda \xrightarrow{\tau} I$ とし，任意の $W_a \in \mathfrak{W}$, $V_\alpha \in \mathfrak{V}$ に対し，$W_a \subset V_{\sigma(a)}$，$V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)}$.$\lambda = \tau \circ \sigma : \Sigma \to I \ : \lambda(a) = \tau(\sigma(a))$ で定義する．$\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{V}$ かつ $\mathfrak{V} \leqq \mathfrak{U}$ のとき，$\mathfrak{U} \sim \mathfrak{V}$（同値）という．そのとき，$H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \cong H^p(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ を得る．更に,

(1) $\rho_{\mathfrak{U}\mathfrak{U}} = id$

(2) $\rho_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} \circ \rho_{\mathfrak{V}\mathfrak{W}} = \rho_{\mathfrak{U}\mathfrak{W}}$

定義 36. $\mathfrak{U}$ を複素多様体（リーマン面）X の開被覆とする．

$$H^p(X, \mathcal{O}) := \text{dir.lim.}_{\mathfrak{U}} H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$$

を X の O 係数の p 次コホモロジー群という．

注意 33. $\bigcup_{\mathfrak{U}} H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$（*disjoint union*）とし，

$$\rho_{\mathfrak{U},\mathfrak{V}} : H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^p(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$$

を制限写像とする．コホモロジー類 $[f] \in H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, $[g] \in H^p(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ に対し，

$$[f] \sim [g] \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}\mathfrak{W} < \mathfrak{U}, \mathfrak{W} < \mathfrak{V}\,; \rho_{\mathfrak{U},\mathfrak{W}}([f]) = \rho_{\mathfrak{V},\mathfrak{W}}([g]) \text{ in } H^p(\mathfrak{W}, \mathcal{O}).$$

このとき，関係” $\sim$ ” は同値関係である．この同値関係による商集合が

$$H^p(X, \mathcal{O}) = \text{dir.lim.}_{\mathfrak{U}} H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$$

こうして，任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ に対して，全射準同型写像

$$\rho_{\mathfrak{U},X} : H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{O})$$

を得る．特に，$H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \cong H^0(X, \mathcal{O}) = \Gamma(X, \mathcal{O})$.

10.3 $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ の有限次元性

X をコンパクトリーマン面とし，$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{\imath \in I}$ を M の開被覆とする．各 U_i の局所座標を $z_j = x_j + iy_j$ とする．簡単のため $U_j = \{z_j \in \mathbb{C} \,:\, |z_j| < 1\}$ とする．X はコンパクトより，実際は，I は有限集合としてよい．今，$\mathfrak{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を $\mathfrak{U}$ の細分とする．$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ は単射より，$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) < \infty$ を示せばよい．今，$0 < r < 1$ とし，$U_j(r) = \{z_j \in \mathbb{C} \,:\, |z_j| < r\}$ とおく．

$$U_j = \bigcup_{0<r<1} U_j(r)$$

より，

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{0<r<1} U_i(r) \right).$$

X はコンパクトで I は有限集合より，$^{\exists}r_0 < 1$ が存在し，

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i(r_0)$$

を得る．$r_0 < r$ なる任意の $r > 0$ に対し，$\mathfrak{U}(r) = \{U_i(r)\}_{i \in I}$ は X の一つの開被覆である．

$$Z_b^1(r) = \left\{ (f_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O}) \quad \sup_{x \in U_i(r) \cap U_j(r)} |f_{ij}(x)| < \infty \text{ for all } i.j \in I \right\}$$

とおく．また，$\xi = (f_{ij})_{i,j \in I} \in Z_b^1(r)$ に対し，

$$\|\xi\| := \|\xi\|_r = \max_{i,j \in I} \sup_{x \in U_i(r) \cap U_j(r)} |f_{ij}(x)|$$

は $Z_b^1(r)$ 上のノルムを定義し，$Z_b^1(r)$ はこのノルムに関してバナッハ空間になる．実際，ノルムになることは容易に確かめられる．バナッハ空間であることは，任意の $i, j \in I$ に対して，$\mathcal{O}\left(U_i(r) \cap U_j(r)\right)$ がバナッハ空間になることから分かる．

$$B_b^1(r) = Z_b^1(r) \cap B^1(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O})$$

および

$$C_b^0(r) = \left\{ (f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O}) \quad \sup_{x \in U_i(r)} |f_i(x)| < \infty \right\}$$

とおく．$\eta = (f_i)_{i \in I} \in C_b^0(r)$ のとき，

$$\|\eta\| = \|\eta\|_r = \max_{i \in I} \sup_{x \in U_i(r)} |f_i(x)| < \infty$$

とおくと，$C_b^0(r)$ もまた，バナッハ空間である．

補題 11. $\delta : C^0(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O}) \longrightarrow B^1(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O})$ をコバウンダリー作用素

$$\{\delta((f_i)_{i \in I}) = (f_i - f_j)_{i,j \in I})\}$$

とすると，

$$\delta^{-1}\left(B_b^1(r)\right) = C_b^0(r)$$

Proof. $(f_i)_{i\in I} \in \delta^{-1}\left(B_b^1(r)\right)$ をとると，$(f_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O})$. そのとき，

$$\delta((f_i)_{i\in I}) = \{(f_i - f_j)_{i,j\in I}\} \in B_b^1(r)$$

そこで，

$$M_{ij} := \sup_{x\in U_i(r)\cap U_j(r)} |f_i(x) - f_j(x)| < \infty \text{ for all } i, j \in I$$

とおく．$U_i(r)$ は U_i の相対コンパクト部分集合ゆえ，任意の $a \in \partial U_(r)$ に対し，a の近傍 V が存在して，

$$\sup_{x\in V\cap U_i(r)} |f_i(x)| < \infty$$

を示せば，有限被覆性から

$$\sup_{x\in U_i(r)} |f_i(x)| < \infty$$

を得る．こうして，$(f_i)_{i\in I} \in C_b^0(r)$． 今，任意に $a \in \partial U_(r)$ をとる．このとき，$a \in U_j$ なる $j \in I$ を選ぶ．a の $U_j(r)$ に於ける相対コンパクト近傍を V とする．$x \in V \cap U_i(r) \subset U_j(r) \cap U_i(r)$ に対し，$f_i(x) = f_i(x) - f_j(x) + f_j(x)$ なので，

$$\sup_{x\in V\cap U_i(r)} |f_i(x)| \leqq M_{ij} + \sup_{x\in V} |f_j(x)| < \infty$$

実際，$\overline{V} \subset U_j(r)$ はコンパクトで $f_j \in \mathcal{O}(U_j(r))$ より最大絶対値の定理から分かる．

□

補題 12. $r_0 < r < 1$ に対し，$\dim_{\mathbb{C}} Z_b^1(r)/B_b^1(r) < \infty$

Proof. $r < \rho < 1$ を選ぶ．Leray's theorem より，$\mathfrak{U}(r)$ が $\mathfrak{U}$ の細分であることに注意すれば $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})/B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \cong H^1(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O}) = Z^1(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O})/B^1(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O})$ であった．よって，

$$Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \oplus C^0(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O}) \longrightarrow Z^1(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O})$$

を

$$(*) \quad ((f_{ij})_{i,j\in I}, (g_i)_{i\in I}) \mapsto \left(f_{ij}|U_i(r) \cap U_j(r)\right)_{i,j\in I} + \delta\left((g_i)_{i\in I}\right)$$

で定義すれば全射である．今，$f \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ は $U_i(\rho) \cap U_j(\rho)$ 上有界なので，$Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow Z_b^1(\rho)$ は全射である．$(*)$ と同じ形で定義される写像：

$$Z_b^1(\rho) \oplus C^0(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O}) \longrightarrow Z^1(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O})$$

もまた全射である．補題 11 から $\delta\left(C_b^0(r)\right) = Z_b^1(r)$．よって，

$$u\left((f_{ij})_{i,j\in I}, (g_i)_{i\in I}\right) = \left(f_{ij}|U_i(r)\cap U_j(r)\right)_{i,j\in I} + \delta\left((g_i)_{i\in I}\right)$$

で与えられる写像

$$u : Z_b^1(\rho) \oplus C_b^0(r) \longrightarrow Z_b^1(r)$$

は全射である．また，

$$v : Z_b^1(\rho) \oplus C_b^0(r) \longrightarrow Z_b^1(r)$$

を

$$v\left((f_{ij})_{i,j\in I}, (g_i)_{i\in I}\right) = \left(-f_{ij}|U_i(r)\cap U_j(r)\right)_{i,j\in I}$$

で定義すれば，$U_i(r)\cap U_j(r)$ が $U_i(\rho)\cap U_j(\rho)$ の相対コンパクト部分集合より，モンテルの定理から，v はコンパクト連続線形写像である．また，

$$(u+v)\left((f_{ij})_{i,j\in I}, (g_i)_{i\in I}\right) = \delta\left((g_i)_{i\in I}\right)$$

を得る．$\delta(C_b^0(r)) = B_b^1(r)$ より，

$$\dim_{\mathbb{C}} Z_b^1(r)/(u+v)\left(Z_b^1(\rho)\oplus C_b^0(r)\right) = \dim_{\mathbb{C}} Z_b^1(r)/B_b^1(r) < \infty$$

が Schwartz の定理（定理 11）から分かる． $\square$

補題 13. $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O}) < \infty$

Proof. $\tau : I \longrightarrow I$ を恒等写像とする．Leray の定理より，

$$\tau^* : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O})$$

は全射.

$$\alpha : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow Z_b^1(\rho)/B_b^1(\rho)$$

を $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \ni (f_{ij})_{i,j\in I} \mapsto (f_{ij}|U_i(\rho)\cap U_j(\rho))_{i,j\in I}$ によって定まる写像とし，

$$\beta : Z_b^1(\rho)/B_b^1(\rho) \longrightarrow H^1(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O})$$

を $Z_b^1(r) \ni (f_{ij})_{i,j\in I} \mapsto (f_{ij}|U_i(r)\cap U_j(r))_{i,j\in I}$ で定める．明らかに，$\tau^* = \beta\circ\alpha$ である．τ^* が全射より, β も全射．よって, $\infty > \dim_{\mathbb{C}} Z_b^1(\rho)/B_b^1(\rho) \geqq \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O})$.

$\square$

最後に，$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O})$ は単射なので，

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \leqq \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathfrak{U}(r), \mathcal{O}) < \infty.$$

こうして，

定理 16. X をコンパクトリーマン面とし，$\mathfrak{U}$ を X の開被覆とする．そのとき，

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) < \infty.$$

特に，$\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}) < \infty$.

Bye-Bye